Κανονική Εξεταστική

Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές

Κωνσταντίνος Στούρας*

02.03.2010

*Οι λύσεις είναι ενδεικτικές και πιθανότατα να περιέχουν λάθη. Για διορθώσεις ή απορίες h2o_poloboy@yahoo.gr

Περιεχόμενα

Θέμα 1ο

Έστω B_t μονοδιάστατη κίνηση Brown ως προς τη διύλιση $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, με $B_0 = x$.

α΄. Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές:

$$E\left[B_t^2\right], \qquad E\left[B_t^3\right], \qquad E\left[B_s B_t^2\right], \ \ 0 < s < t$$

β΄. Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες μέσες τιμές:

$$E\left[e^{B_t}|\mathcal{F}_s\right], \ \ 0 < s < t, \qquad E\left[B_s B_t|\mathcal{F}_r\right], \ \ 0 < r < s < t$$

Απόδειξη.

α. Έστω $B_t = W_t + x$ με $\{W_t\}_t$: κίνηση Brown με $W_0 = 0$. Τότε:

$$E\left[B_t^2\right] = E\left[(W_t + x)^2\right] = E\left[W_t^2 + 2W_t x + x^2\right] =$$

$$= E\left[W_t^2\right] + 2x\cancelto{0}{E\left[W_t\right]} + x^2 = t + x^2.$$

$$E\left[B_t^3\right] = E\left[(W_t + x)^3\right] = E\left[W_t^3 + 3W_t^2 x + 3x^2 W_t + x^3\right] =$$

$$= \cancelto{0}{E\left[W_t^3\right]} + 3xE\left[W_t^2\right] + 3x^2\cancelto{0}{E\left[W_t\right]} + x^3 = 3xt + x^3.$$

Για $0 < s < t$

$$E\left[B_s B_t^2\right] \overset{s<t}{=} E\left[(W_s + x)(W_t + x)^2\right] = E\left[(W_s + x)\left(W_t^2 + 2xW_t + x^2\right)\right] =$$

$$= E\left[W_s W_t^2\right] + 2xE\left[W_s W_t\right] + x^2\cancelto{0}{E\left[W_s\right]} + xE\left[W_t^2\right] + 2x^2\cancelto{0}{E\left[W_t\right]} + x^3 =$$

$$= E\left[W_s W_t^2\right] + 2xs + xt + x^3 \tag{1.1}$$

Άρα πρέπει να υπολογίσουμε την $E\left[W_s W_t^2\right]$. Έχουμε:

$$E\left[W_s W_t^2\right] = E\left[(W_t - W_s + W_s)^2 W_s\right] =$$

$$= E\left[\left((W_t - W_s)^2 + W_s^2 + 2(W_t - W_s) W_s\right) W_s\right] =$$

$$= E\left[(W_t - W_s)^2 W_s\right] + E\left[W_s^3\right] + 2E\left[(W_t - W_s) W_s^2\right] \overset{\text{ανεξαρτησία}}{=}$$

$$= E\left[(W_t - W_s)^2\right] E\left[W_s\right] + 0 + 2E\left[(W_t - W_s)\right] E\left[W_s^2\right] \overset{?}{=} 0 \tag{1.2}$$

Τελικά:

$$E\left[B_s B_t^2\right] = 2xs + xt + x^3.$$

β. Για $0 < s < t$ έχουμε:

$$E\left[e^{B_t}\middle|\mathcal{F}_s\right] = E\left[e^{B_t - B_s} e^{B_s}\middle|\mathcal{F}_s\right] = e^{B_s} E\left[e^{B_t - B_s}\middle|\mathcal{F}_s\right] = \qquad \left(e^{B_s}\ \mathcal{F}_s - \text{μετ/μη}\right)$$

$$\overset{\text{ανεξ. προσαυξ.}}{=} e^{B_s} E\left[e^{B_t - B_s}\right] = e^{B_s} E\left[e^{B_t - B_s}\right] = e^{B_s} e^{\frac{t-s}{2}}.$$

Για $0 < r < s < t$ έχουμε:

$$E\left[B_s B_t\middle|\mathcal{F}_r\right] \overset{\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_s}{=} E\left[E\left[B_s B_t\,|\mathcal{F}_s\right]\middle|\mathcal{F}_r\right] = E\left[B_s^2\middle|\mathcal{F}_r\right] =$$

$$= E\left[(B_s - B_r)^2 - B_r^2 + 2B_s B_t\middle|\mathcal{F}_r\right] = s - r - B_r^2 + B_r^2 = s - r + B_r^2.$$

□

Θέμα 2ο

Έστω B_t μονοδιάστατη κίνηση Brown ως προς τη διύλιση $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$.

α΄. Αν

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_1(s,\omega)\,ds + \int_0^t b_1(s,\omega)\,dB_s$$

και

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a_2(s,\omega)\,ds + \int_0^t b_2(s,\omega)\,dB_s$$

να γραφεί η ανέλιξη $Z_t = X_t Y_t$ σαν ανέλιξη Ito.

β΄. Να βρεθεί η ποσότητα $A(t)$ για την οποία η ανέλιξη:

$$M_t = A(t)\,(B_t - 2t)\,e^{2B_t}$$

είναι $\mathcal{F}_t$ -martingale.

Απόδειξη.

α. Γράφουμε τις προηγούμενες εξισώσεις σε διαφορική μορφή:

$$dX_t = a_1(t)\,dt + b_1(t)\,dB_t$$
$$dY_t = a_2(t)\,dt + b_2(t)\,dB_t$$

Εφαρμόζοντας την φόρμουλα του Ito στην $f(x,y) = x\,y$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} dZ_t = {} & f_x(X_t,\,Y_t)\,dX_t + f_y(X_t,\,Y_t)\,dY_t + f_{xx}(X_t,\,Y_t)\,dX_t^2 + \\ & + f_{xy}(X_t,\,Y_t)\,dX_t dY_t + f_{yy}(X_t,\,Y_t)\,dY_t^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ισχύουν:

$$\left.\begin{aligned} dX_t^2 &= (b_1(t))^2\,dt \\ dY_t^2 &= (b_2(t))^2\,dt \\ dX_t dY_t &= b_1(t)\,b_2(t)\,dt \\ f_x(X_t,\,Y_t) &= Y_t \\ f_y(X_t,\,Y_t) &= X_t \\ f_{xy}(X_t,\,Y_t) &= 1 \\ f_{xx}(X_t,\,Y_t) &= f_{yy}(X_t,\,Y_t) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Η (2.3) από την (2.2) γίνεται:

$$dZ_t = Y_t\, dX_t + X_t\, dY_t + b_1(t)\, b_2(t)\, dt \tag{2.3}$$

β. Θέτουμε $f(t,\, x) = A(t)(x-2t)\, e^{2x}$ και από γνωστό Θεώρημα[1] η $M_t = f(t,\, B_t)$ είναι $\mathcal{F}_t$ -martingale[2] αν:

$$f_t = -\frac{1}{2} f_{xx} \tag{2.4}$$

Άρα

$$f_t = e^{2x}\big(A'(t)(x-2t) - 2A(t)\big) \tag{2.5α}$$

$$f_x = A(t)\left(e^{2x} + 2e^{2x}(x-2t)\right) \tag{2.5β}$$

$$f_{xx} = A(t)\left(2e^{2x} + 2\Big(2e^{2x}(x-2t) + e^{2x}\Big)\right) =$$

$$= 2A(t)\, e^{2x}\Big(2 + 2(x-2t)\Big) \tag{2.5γ}$$

Από τις σχέσεις (2.5α), (2.5β), (2.5γ) η ικανή συνθήκη (2.4) γίνεται:

$$\cancel{e^{2x}}\big(A'(t)(x-2t) \cancel{-2A(t)}\big) = -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2A(t)}\cancel{e^{2x}}\Big(\cancel{2}^{1} + \cancel{2}^{1}(x-2t)\Big) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = -2 \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{A}(t)=\mathrm{A}(0)e^{-2t}}$$

που είναι και το ζητούμενο. □

---

[1] Επειδή η $f \in C^{1,\,2}\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\right)$

[2] Παρατήρηση: Αν ισχύει η (2.4) τότε η $M_t = f(t,\, B_t)$ είναι $\mathcal{F}_t$ -local martingale. Αν *επιπρόσθετα* ισχύει:

$$E\left[\int_0^T f_{xx}^2(t,\, B_t)\, dt\right] < \infty \tag{2.5}$$

τότε η M_t είναι $\mathcal{F}_t$ -martingale στο $0 \le t \le T$.
Η συνθήκη (2.5) για τις ανάγκες του μαθήματος αυτού ικανοποιείται προφανώς.

Θέμα 3ο

Να λυθεί η Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση:

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(\sqrt{1+X_t^2}+\frac{X_t}{2}\right)dt+\sqrt{1+X_t^2}\,dB_t \\ X_0 &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Υπόδειξη: Θέτοντας $X_t = \sinh(Y_t)$ καταλήγουμε σε μια πολύ απλή εξίσωση για την Y_t.

Απόδειξη.

1ος Τρόπος (Συντομότερος!)

Χρησιμοποιώντας την Υπόδειξη έχουμε[3]:

$$dX_t = d\sinh(Y_t) = \cosh Y_t\, dY_t + \frac{1}{2}\sinh(Y_t)\ dY_t^2$$

Άρα η (3.1) γίνεται:

$$\cosh Y_t\, dY_t + \frac{1}{2}\sinh(Y_t)\ dY_t^2 = \left(\sqrt{1+\sinh^2(Y_t)}+\frac{\sinh(Y_t)}{2}\right)\ dt+\sqrt{1+\sinh^2(Y_t)}\,dB_t$$

$$\cosh Y_t\, dY_t + \frac{1}{2}\sinh(Y_t)\ dY_t^2 = \left(\cosh Y_t+\frac{\sinh(Y_t)}{2}\right)dt+\cosh Y_t\, dB_t$$

Απαιτώ:

$$\left.\begin{aligned} \cosh Y_t\, dY_t = \cosh Y_t\, dt + \cosh Y_t\, dB_t &= \cosh Y_t\ (dt+dB_t) \\ \frac{1}{2}\sinh(Y_t)\ dY_t^2 &= \frac{1}{2}\sinh(Y_t)\ dt \end{aligned}\right\}$$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} dY_t &= dt + dB_t \\ Y_t &= t + B_t \end{aligned}$$

[3] Η X_t είναι στοχ. ανελ. άρα το $dX_t = d\sinh(Y_t)$ θα υπολογιστεί με Ito

Έτσι, πολύ σύντομα καταλήγουμε ότι η λύση της (3.1) είναι η: $\boxed{X_t = \sinh\left(t + B_t\right)}$

2ος Τρόπος (Αγνοώντας την Υπόδειξη):

Εφαρμόζοντας την γνωστή θεωρία (βλ. Σπηλιώτης σελ. 182, 183) έχουμε:
$b\left(x\right) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{2}$ και $\sigma\left(x\right) = \sqrt{1+x^2}$
Θέτουμε

$$g\left(x\right) = \int_0^x \frac{1}{\sigma\left(y\right)} dy = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} dy = \sinh^{-1} x$$

.

Άρα

$$Y_t = \sinh^{-1} X_t \tag{3.2}$$

Εφαρμόζοντας Ito formula στην Y_t έχουμε:

$$\begin{aligned} g\left(t,\ X_t\right) - g\left(0,0\right) = & \int_0^t \left[\frac{\partial g}{\partial t}\left(s,\ X_s\right) + b\left(X_s\right)\ \frac{\partial g}{\partial x}\left(s,\ X_s\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(X_s\right)\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\left(s,\ X_s\right)\right] ds + \\ & + \int_0^t \sigma\left(X_s\right)\ \frac{\partial g}{\partial x}\left(s,\ X_s\right) dB_s \end{aligned} \tag{3.3}$$

Όμως:

$$\begin{aligned} & g\left(t,\ X_t\right) = g\left(X_t\right) \\ & g\left(0,0\right) = 0 \\ & \frac{\partial g}{\partial t}\left(s,\ X_s\right) = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} b\left(X_s\right)\ \frac{\partial g}{\partial x}\left(s,\ X_s\right) &= \left(\sqrt{1+X_s^2} + \frac{X_s}{2}\right) \frac{1}{\sigma\left(X_s\right)} = \\ &= \left(\sqrt{1+X_s^2} + \frac{X_s}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{1+X_s^2}} = 1 + \frac{X_s}{2\sqrt{1+X_s^2}} \\ \frac{1}{2}\sigma^2\left(X_s\right)\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\left(s,\ X_s\right) &= \frac{1}{2}\cancel{\sigma^2\left(X_s\right)}\ \frac{-\sigma'\left(X_s\right)}{\cancel{\sigma^2\left(X_s\right)}} = -\frac{X_s}{2\sqrt{1+X_s^2}} \\ \sigma\left(X_s\right)\ \frac{\partial g}{\partial x}\left(s,\ X_s\right) &= \sigma\left(X_s\right)\ \frac{1}{\sigma\left(X_s\right)} = 1 \end{aligned}$$

Άρα η (3.3) γίνεται:

$$Y_t = \int_0^t \left[1 + \frac{X_s}{2\sqrt{1+X_s^2}} - \frac{X_s}{2\sqrt{1+X_s^2}}\right] ds + \int_0^t 1\, dB_s \Longleftrightarrow$$

$$Y_t = t + B_t \tag{3.4}$$

Έτσι, η αρχική εξίσωση (3.1) απλουστεύεται κατά πολύ στην (3.4). Τέλος, λόγω της (3.2) βρίσκουμε:

$$X_t = \sinh\left(t + B_t\right)$$

□