

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
3^ο εξάμηνο
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
8/02/2010

1. Να υπολογισθεί με τον σύνθετο τύπο ολοκλήρωσης τραπεζίου ($N=4$) το ολοκλήρωμα

$$I = \int_2^3 x \ln x \, dx$$

Να βρεθεί το ελάχιστο N ώστε το σφάλμα με τον σύνθετο τύπο ολοκλήρωσης τραπεζίου να είναι μικρότερο του 10^{-5} .

2. Έστω $c_i := l_i(0)$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$ όπου $l_i(x)$ τα πολυώνυμα Lagrange. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ταυτότητες:

$$\sum_{i=0}^n c_i x_i^j = \begin{cases} 1, & \text{οταν } j = 0 \\ 0, & \text{οταν } j = 1, 2, \dots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \dots x_n, & \text{οταν } j = n+1 \end{cases}$$

3. Δίνεται η εξίσωση $x = 1 + \frac{3^{-x}}{2}$. (1)

- α) Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση ρ στο διάστημα $[0, 2]$.
 β) Να εξετάσετε αν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της γενικής επαναληπτικής μεθόδου $x_{k+1} = 1 + \frac{3^{-x_k}}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ στη λύση ρ της (1) για κάθε $x_0 \in [0, 2]$.
 γ) Να γίνουν 3 επαναλήψεις της μεθόδου με αρχικό $x_0 = 0.75$, για την προσέγγιση της λύσης ρ της (1).
 δ) Πόσες επιπλέον επαναλήψεις πρέπει να γίνουν ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από 10^{-4} .
 ε) Ποια είναι η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου; (με αιτιολόγηση).

4. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 20 & -6 \\ 10 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -20 \\ -13 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί η επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel και αν ναι να γίνουν 2 επαναλήψεις με αρχικό διάνυσμα το μηδενικό διάνυσμα. Να δοθεί επίσης μια εκτίμηση του σφάλματος, στη 2^η επανάληψη, που να μην χρησιμοποιεί τον πίνακα επαναλήψεων της μεθόδου Gauss-Seidel και με τη βοήθεια **κατάλληλης διανυσματικής νόρμας** της επιλογής σας και της αντίστοιχης φυσικής νόρμα πίνακα.

Δίνεται η γενική εκτίμηση σφάλματος $\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$, όπου B ο αντίστοιχος επαναληπτικός πίνακας.

Παρατηρήσεις

1. Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες
2. Βαθμολογία: Τα θέματα είναι ισοδύναμα.