

Σχολή Ε.Μ.Φ.Ε – ΦΥΣΙΚΗ ΙΙΙ (ΚΥΜΑΤΙΚΗ)
Κανονικές Εξετάσεις Χειμερινού εξαμήνου 2009-2010

05/02/2010

Διάρκεια εξέτασης 2:30

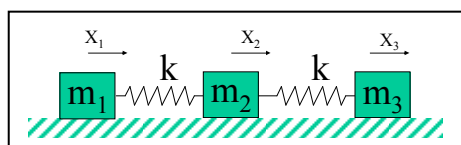
Ι. Σ. Ράπτης, Ε. Φωκίτης

Θέμα 1. Ένας αρμονικός ταλαντωτής με ασθενή απόσβεση, (μάζα $= m$, σταθερά ελατηρίου $= s$, συντελεστής τριβής $= r$) διεγείρεται με αρχικές συνθήκες, $\psi(t=0) = 0$ και $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} = v_0$.

(α) Αν το παραπάνω σύστημα, (m, s, r) , διεγερθεί με εξωτερική δύναμη της μορφής $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, και θεωρήσουμε ότι το $r = 0$, να υπολογίσετε το πλάτος απομάκρυνσης της μόνιμης λύσης και να το σχεδιάσετε συναρτήσει του ω .

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας γράφεται: $\psi(t) = (v_0/\omega_a) \left(e^{-\gamma t/2} \right) \sin(\omega_a t)$, και προσδιορίστε τα ω_a, γ , συναρτήσει των (m, s, r) .

(γ) Αν T_a είναι η περίοδος του ταλαντωτή με ασθενή απόσβεση, και ρ είναι ο λόγος μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων της $\psi(t)$, υπολογίστε την παράμετρο γ , συναρτήσει των T_a και ρ .



Θέμα 2. Σε ένα γραμμικό τριατομικό μόριο, κάθε άτομο, στην κλασική θεώρηση, αλληλεπιδρά μόνο με τον πλησιέστερο γείτονά του, με ένα ελατήριο σταθεράς k .

(α) Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης των τριών ατόμων.

(β) Αν οι μάζες των ατόμων είναι $2m_1 = 2m_3 = m_2 = m$, θεωρήστε λύσεις με τη μορφή κανονικών τρόπων ταλάντωσης και υπολογίστε τις αντίστοιχες συχνότητες, συναρτήσει του $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

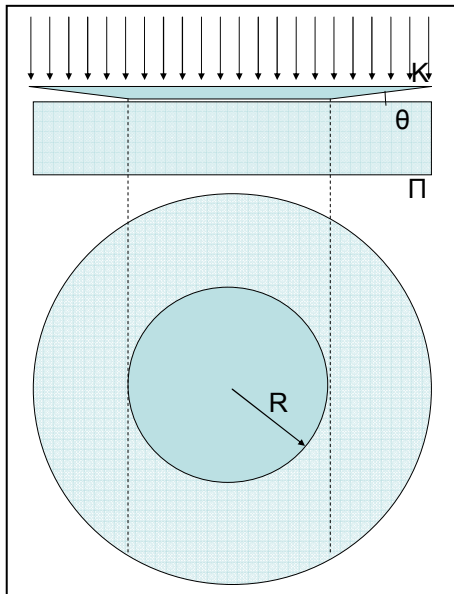
(γ) Υπολογίστε τους λόγους των πλατών ταλάντωσης, $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_2}{x_3}$, και $\frac{x_1}{x_2}$, για κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης.

Θέμα 3. Ιδανική χορδή μήκους L , που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x , έχει μεταβλητή πυκνότητα, $\rho(x) = \rho_0 \left(1 + x^2/L^2\right)$ και τείνεται με τάση T .

(α) Να παραχθεί η διαφορική εξίσωση κύματος που ικανοποιεί μία διαταραχή, $y = y(x, t)$, της χορδής, στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, ($\sin \theta = \tan \theta = \theta$).

(β) Στην περίπτωση που διεγείρουμε, στο άκρο $x = 0$, αρμονική ταλάντωση, $y(x=0, t) = A \cos(\omega t)$, σε μόνιμη κατάσταση, να υπολογίσετε το μήκος κύματος της διαταραχής που διαδίδεται στη χορδή, ως συνάρτηση της θέσης x , $\lambda = \lambda(x)$, και να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο αυτής της κίνησης.

(γ) Στην περίπτωση που η γραμμική πυκνότητα είναι ίδια σε όλο το μήκος της χορδής, και στο ένα άκρο της συνδέεται με μία χορδή αμελητέας γραμμικής πυκνότητας, να υπολογισθεί το συνολικό πλάτος απομάκρυνσης του σημείου σύνδεσης, όταν σε αυτό φτάνει παλμός ύψους A .



Θέμα 4. Κολοβός γυάλινος κώνος (Κ), με μικρή γωνία βάσης, θ , ($\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$), ακουμπάει, ανάστροφα, σε γυάλινο πλακίδιο (Π), έτσι ώστε, ανάμεσα στις παράλληλες επιφάνειες, στην περιοχή επαφής, που είναι κύκλος ακτίνας R , να παρεμβάλλεται ένα στρώμα αέρος με μικρό πάχος, (π.χ., μερικά νανόμετρα). Το σύστημα φωτίζεται κατακόρυφα, από πάνω, με σύμφωνο μονοχρωματικό φως μήκους κύματος $\lambda = 500 \text{ nm}$. Θεωρήστε ότι ο αέρας έχει δείκτη διάθλασης περίπου 1, και ότι η ανακλώμενη ακτινοβολία από όλες τις επιφάνειες κατευθύνεται, επίσης, περίπου κατακόρυφα.

(α) Εξηγήστε αναλυτικά γιατί, όταν παρατηρεί κανείς την ανακλώμενη ακτινοβολία, βλέπει κυκλικούς φωτεινούς και σκοτεινούς κροσσούς.

(β) Εξηγήστε αν ο κεντρικός κροσσός είναι σκοτεινός ή φωτεινός και πόση είναι η ακτίνα του.

(γ) Δώστε από μία σχέση υπολογισμού για τις ακτίνες των

διαδοχικών φωτεινών (r_φ) και σκοτεινών (r_σ) κροσσών, αντίστοιχα.

ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΣ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

$$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k}, \quad v_{\text{group}} = \frac{d\omega}{dk},$$

$$\sum_{n=1}^N a \cos(\omega_1 + [n-1]\delta\omega) = a \frac{\sin[(N\delta\omega)t/2]}{\sin[(\delta\omega)t/2]} \cos(\bar{\omega}t), \quad \bar{\omega} \equiv \omega_1 + \frac{N-1}{2} \delta\omega$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}, \quad r \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta}, \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda} f \sin \theta,$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 a}{a^2}, \quad a = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 a}{a^2} \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta}$$

Θέμα 1. Ένας αρμονικός ταλαντωτής με ασθενή απόσβεση, (μάζα = m , σταθερά ελατηρίου = s , συντελεστής τριβής = r) διεγείρεται με αρχικές συνθήκες, $\psi(t=0) = 0$ και $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} = v_0$. **(α)** Δείξτε ότι η συνάρτηση απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας γράφεται: $\psi(t) = (v_0/\omega_a) \left(e^{-\gamma t/2}\right) \sin(\omega_a t)$, και προσδιορίστε τα ω_a, γ , συναρτήσει των (m, s, r) . **(β)** Αν T_a είναι η περίοδος του ταλαντωτή με ασθενή απόσβεση, και λ είναι ο λόγος μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων της $\psi(t)$, υπολογίστε την παράμετρο γ , συναρτήσει των T_a και λ . **(γ)** Αν το παραπάνω σύστημα, (m, s, r) , διεγερθεί με εξωτερική δύναμη της μορφής $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, και θεωρήσουμε ότι το $r = 0$, να υπολογίστε το πλάτος απομάκρυνσης της μόνιμης λύσης και να το σχεδιάσετε συναρτήσει του ω .

Απάντηση

(α) Θα δείξουμε πρώτα ότι η συνάρτηση
$$\psi(t) = A \left(e^{-\gamma t/2} \right) \sin(\omega_a t + \varphi) \quad (1)$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης:
$$\ddot{\psi} + \frac{r}{m} \dot{\psi} + \frac{s}{m} \psi = 0 \quad (2)$$

Αντικαθιστούμε στην (2) τις $\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}$, όπως προκύπτουν από την (1), και ομαδοποιούμε τους συντελεστές του $\sin(\omega_a t)$ και $\cos(\omega_a t)$, που ο καθένας πρέπει να είναι συνολικά ίσος με μηδέν:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + \frac{r}{m} \dot{\psi} + \frac{s}{m} \psi = 0 \Rightarrow A \left[\frac{\gamma^2}{4} - \omega_a^2 \right] e^{-\gamma t} \sin(\omega_a t) - A \gamma \omega_a e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t) \\ + \frac{r}{m} \left[-\frac{A \gamma}{2} e^{-\gamma t} \sin(\omega_a t) + A \omega_a e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t) \right] + \frac{s}{m} A e^{-\gamma t} \sin(\omega_a t) = 0 \end{aligned}$$

Μηδενίζοντας τον συντελεστή του $\sin(\omega_a t)$:
$$A \left[\frac{\gamma^2}{4} - \omega_a^2 \right] - \frac{r}{m} \frac{A \gamma}{2} + \frac{s}{m} A = 0 \quad (3)$$

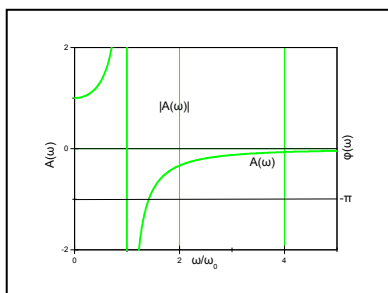
Μηδενίζοντας τον συντελεστή του $\cos(\omega_a t)$:
$$A \gamma \omega_a = A \frac{r}{m} \omega_a \Rightarrow \gamma = \frac{r}{m} \quad (4)$$

και αντικαθιστώντας στην (3):
$$\omega_a^2 = \frac{s}{m} - \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2$$

Εφαρμόζοντας και τις αρχικές συνθήκες:
$$A = \frac{v_0}{\omega_a}$$

(β) $\psi(t) = A \left(e^{-\gamma t/2} \right) \sin(\omega_a t)$ και $\psi(t+T_a) = A \left(e^{-\gamma(t+T_a)/2} \right) \sin(\omega_a(t+T_a))$

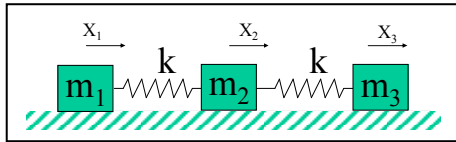
Επειδή έχουμε διαδοχικά μέγιστα $\sin(\omega_a t) = \sin(\omega_a(t+T_a)) = 1$, οπότε
$$\lambda \equiv \frac{\psi(t)}{\psi(t+T_a)} = e^{\gamma T_a} \Rightarrow \gamma = \frac{\ln \lambda}{T_a}$$



(γ) Αν $r = 0$, η διαφορική εξίσωση κίνησης γίνεται
$$\ddot{\psi} + \frac{s}{m} \psi = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t),$$
 άρα η λύση θα είναι της μορφής $\psi = A \cos(\omega t)$, οπότε, παραγωγίζοντας 2 φορές και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχουμε, μετά την απαλοιφή των $\cos(\omega t)$, την σχέση
$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2},$$
 που αποδίδεται από το διπλανό σχήμα.

Θέμα 2. Σε ένα γραμμικό τριατομικό μόριο της μορφής A-B-A, κάθε άτομο, στην κλασική θεώρηση, αλληλεπιδρά μόνο με τον πλησιέστερο γείτονά του, με ένα ελατήριο σταθεράς k . (α) Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης των τριών ατόμων. (β) Αν οι μάζες των ατόμων είναι $2m_A = m_B = m$, θεωρήστε λύσεις με τη μορφή των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, συναρτήσει των $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Απάντηση



$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε: $m_1 = m_3 = m_A = \frac{m}{2}$, και $m_2 = m_B = m$

Υποθέτουμε $x_1 = A \cos(\omega t)$, $x_2 = B \cos(\omega t)$, $x_3 = \Gamma \cos(\omega t)$

Παραγωγίζουμε και αντικαθιστούμε στο αρχικό σύστημα, που μετατρέπεται σε ομογενές γραμμικό σύστημα 3x3 για τα πλάτη, A, B, Γ, που, για να είναι επιλύσιμο πρέπει να έχει μηδενική ορίζουσα :

$$\begin{vmatrix} (2\omega_0^2 - \omega^2) & -2\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & (2\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 \\ 0 & -2\omega_0^2 & (2\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^2(\omega^2 - 4\omega_0^2)(\omega^2 - 2\omega_0^2) = 0$$

Επομένως:

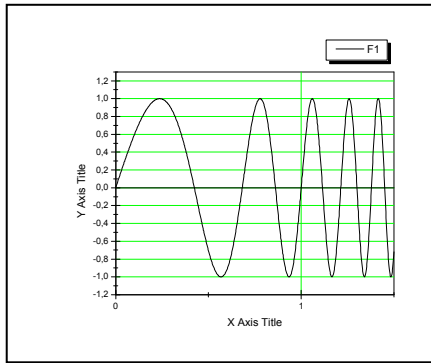
- $\omega_1 = 0$ ισοταχής κίνησης του κέντρου μάζας του συστήματος
- $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_0$ συμμετρική ταλάντωση με το B: ακίνητο
- $\omega_3 = 2\omega_0$ αντισυμμετρική ταλάντωση με το B να κινείται αντίθετα από τα A

Θέμα 3. Ιδανική χορδή μήκους L , που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x , έχει μεταβλητή πυκνότητα, $\rho(x) = \rho_0(1 + x^2/L^2)$ και τείνεται με τάση T . **(α)** Να παραχθεί η διαφορική εξίσωση κύματος που ικανοποιεί μία διαταραχή, $y = y(x, t)$, της χορδής, στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, ($\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$). **(β)** Στην περίπτωση που διεγείρουμε, στο άκρο $x = 0$, αρμονική ταλάντωση, $y(x = 0, t) = A \cos(\omega t)$, σε μόνιμη κατάσταση, να υπολογίσετε το μήκος κύματος της διαταραχής που διαδίδεται στη χορδή, ως συνάρτηση της θέσης x , $\lambda = \lambda(x)$, και να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο αυτής της κίνησης. **(γ)** Στην περίπτωση που η γραμμική πυκνότητα είναι ίδια σε όλο το μήκος της χορδής, και στο ένα άκρο της συνδέεται με μία χορδή αμελητέας γραμμικής πυκνότητας, να υπολογισθεί το συνολικό πλάτος απομάκρυνσης του σημείου σύνδεσης, όταν σε αυτό φτάνει παλμός ύψους A .

Απάντηση

(α) Από το νόμο του Νεύτωνα για στοιχείο μάζας $dm = \rho dx$, έχουμε

$$(\rho(x)dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$



(β) Από το (α) έχουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{T}{\rho_0(1 + x^2/L^2)}}$$

Και, για το μήκος κύματος :

$$k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\frac{\rho_0(1 + x^2/L^2)}{T}} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{T}{\rho_0(1 + x^2/L^2)}}$$

Το στιγμιότυπο φαίνεται στο διπλανό σχήμα, το οποίο αποδίδει την μείωση του μήκους κύματος με την απόσταση.

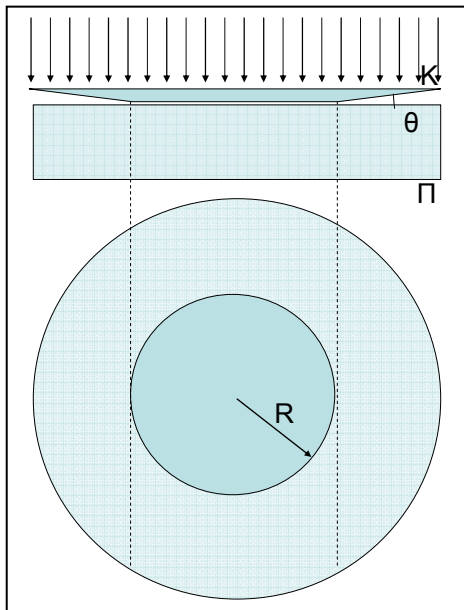
(γ) Ο συντελεστής ανάκλασης πλάτους, σε μία ασυνέχεια, δίνεται από τη σχέση

$$r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2},$$

όπου $z_1 = \sqrt{T\rho_1}$, $z_2 = \sqrt{T\rho_2}$, οι σύνθετες αντιστάσεις των αντίστοιχων μέσων διάδοσης.

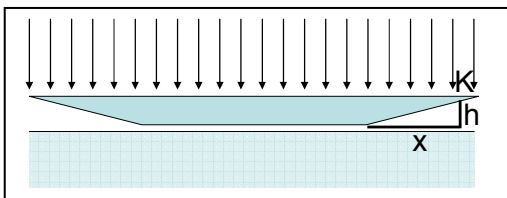
Στη συγκεκριμένη περίπτωση : $z_2 \approx 0 \Rightarrow r \approx 1$, επομένως: $A_r = A_i$ και $A_{ολ} = A_i + A_r = 2A$

Δηλαδή, το συνολικό πλάτος είναι το διπλάσιο του προσπίπτοντος πλάτους.



Θέμα 4. Κολοβός γυάλινος κώνος (K), με μικρή γωνία βάσης, θ , ($\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$), ακουμπάει, ανάστροφα, σε γυάλινο πλακίδιο (Π), έτσι ώστε, ανάμεσα στις παράλληλες επιφάνειες, να παρεμβάλλεται ένα στρώμα αέρος με μικρό πάχος, (π.χ., $\approx 0,1 \text{ nm}$). Το σύστημα φωτίζεται κατακόρυφα, από πάνω, με σύμφωνο μονοχρωματικό φως μήκους κύματος $\lambda = 500 \text{ nm}$. Θεωρήστε ότι ο αέρας έχει δείκτη διάθλασης περίπου 1, και ότι η ανακλώμενη ακτινοβολία από όλες τις επιφάνειες κατευθύνεται επίσης κατακόρυφα. **(α)** Εξηγήστε αναλυτικά γιατί, όταν παρατηρεί κανείς την ανακλώμενη ακτινοβολία, βλέπει κυκλικούς φωτεινούς και σκοτεινούς κροσσούς. **(β)** Εξηγήστε αν ο κεντρικός κροσσός είναι σκοτεινός ή φωτεινός και πόση είναι η ακτίνα του. **(γ)** Δώστε από μία σχέση υπολογισμού για τις ακτίνες των διαδοχικών φωτεινών (r_φ) και σκοτεινών (r_σ) κροσσών, αντίστοιχα, αν η επιφάνεια επαφής είναι κύκλος ακτίνας R.

Απάντηση



(α) Ανάμεσα στις ανακλώμενες ακτίνες από τις επικλινείς πλευρές του κώνου και από την πάνω πλευρά της επίπεδης πλάκας υπάρχει διαφορά οπτικού δρόμου: $\Delta O\Delta = 2h$.

Επιπλέον, η ανακλώμενη στη οριζόντια πλευρά του κάτω πλακιδίου έχει διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \pi \Rightarrow \Delta O\Delta = \frac{\lambda}{2}$

Άρα, στην κεντρική περιοχή, όπου λόγω αμελητέου πάχους στο στρώμα του αέρα, υπάρχει μόνο η διαφορά φάσης από την ανάκλαση, έχουμε καταστρεπτική συμβολή, άρα σκοτεινό κροσσό.

Για $r = R + x > R$, έχουμε

Για φωτεινούς κροσσούς : $2h_\varphi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

Για σκοτεινούς κροσσούς : $2h_\sigma = m\lambda$

Αλλά: $\tan \theta = \frac{h_\sigma}{x_\sigma} = \frac{h_\varphi}{x_\varphi}$, επομένως οι αντίστοιχες ακτίνες των φωτεινών και σκοτεινών κροσσών είναι

$$r = R + x \Rightarrow \begin{cases} r_\varphi = R + x_\varphi = R + \frac{(m+1/2)\lambda}{2 \tan \theta} \\ r_\sigma = R + x_\sigma = R + \frac{m\lambda}{2 \tan \theta} \end{cases}$$