

$$\exists x \forall y (x) \vee_{x,y} \neg \phi(x)$$

$$\phi = \exists x \exists y (\neg \phi(x))$$

## ΕΠΙΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ, 2005

*✓* **ZHTHMA 1.** Τι σημαίνει απονομή στον προτασιακό λογισμό; Πότε δύο προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι; Αποδείξτε ότι

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \text{ και } A \wedge (B \vee C)$$

είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι. Γράψτε τον αληθοτίνακα για τον προτασιακό τύπο  $(A \rightarrow B) \wedge \neg(B \rightarrow C)$ . Χρησιμοποιήστε τον για να βρείτε την ισοδύναμη διαζευκτική κανονική μορφή αυτού του προτασιακού τύπου.

*?* **ZHTHMA 2.** Υποθέστε ότι στη γλώσσα του προτασιακού λογισμού έχετε μόνον τους συνδέσμους  $\neg$  και  $\rightarrow$ . Διατυπώστε κανόνες tableau γι' αυτούς τους συνδέσμους. Δώστε, σ' αυτή την περίπτωση, τον ορισμό του συνόλου Hintikka και αποδείξτε ότι: κάθε τέτοιο σύνολο είναι ικανοποιήσιμο. Πώς αυτό χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε ότι αν  $\phi$  ταυτολογία τότε το  $\neg\phi$  έχει ένα κλειστό σημασιολογικό tableau;

*+* **ZHTHMA 3.** Ο τύπος  $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall y \psi)$  είναι λογικά έγκυρος όταν ο  $\phi$  δεν περιέχει καμιά ελεύθερη εμφάνιση της  $x$ . Δώστε ένα αντιπαράδειγμα στην περίπτωση που αυτή η προυπόθεση δεν ικανοποιείται.

Ας υποθέσουμε ότι στο αξιωματικό σύστημα τύπου Hilbert του κατηγορηματικού λογισμού έχουμε ότι  $T, \phi \vdash \psi$  (φ πρόταση) και ότι στην απόδειξη του  $\psi$  από το  $T, \phi$  έχει χρησιμοποιηθεί μόνον ο κανόνας Gen ως κανόνας απαγωγής. Αποδείξτε σ' αυτή την περίπτωση ότι  $T \vdash \phi \rightarrow \psi$ . [Μπορείτε να θεωρείστε δεδομένο ότι για οποιοδήποτε  $\phi$ , έχουμε  $\vdash \phi \rightarrow \phi$ .]

**ZHTHMA 4. a)** Έστω η γλώσσα  $L$  του πρωτοβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού έχει την ισότητα  $=$  και ένα σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων  $P$ . Για κάθε μία από τις αυτόλουθες συνθήκες βρείτε μία πρόταση  $\phi$  της  $L$  ώστε η ερμηνεία  $A = <|A|, P^A>$  να είναι μοντέλο της  $\phi$  αν και μόνον αν η συνθήκη ικανοποιείται.

1:  $|A|$  έχει ακριβώς δύο μέλη.

2:  $|A|$  έχει τουλάχιστον  $n$  τον αριθμό μέλη.

3. Η  $P^A$  ως σχέση είναι μία συνάρτηση από το  $|A|$  στο  $|A|$ .

*β)* Πότε έχουμε  $\phi \not\models \psi$ ; (όπου  $\phi$  και  $\psi$  προτάσεις του κατηγορηματικού λογισμού).

Αποδείξτε ότι  $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \not\models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ , όπου  $P$  και  $Q$  σύμβολα κατηγορημάτων μιας θέσης.

**ZHTHMA 5.** Τι είναι μοντέλο ενός συνόλου  $\Sigma$ ; Είναι δυνατόν, αν το  $\Sigma$  είναι άπειρο, να μην υπάρχει μοντέλο για το  $\Sigma$  ενώ για όλα τα πεπερασμένα

Αποδίδεται το  $\sum$  να είναι πλήρης για την  $\lambda_0^*$ . Αναδειγμάτων 16x381 το γύρισμα:

Συγκαταλογεύεται ότι η πλήρης πρόταξη φέρεται στην μορφή  $\sum k_i \lambda_i$  και Τ<sub>λ</sub> = 70.

\* Δηλ. Η πρόταξη είναι κυκλοποιητική.