



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»

22 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

A

ΘΕΜΑ 1° (A) Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : x - y - 1 = 0, 2y - z + 2 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{\alpha} = \frac{z-4}{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(1) Βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας ε_1 και την αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για να είναι οι ευθείες ε_1 και ε_2 συνεπίπεδες. *Μονάδες 1*

(2) Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι συνεπίπεδες, να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. *Μονάδες 1,2*

(B) Δίνεται η σφαίρα (Σ): $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$ και το επίπεδο (Π): $y + z - 4 = 0$. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου της τομής των δύο επιφανειών. *Μονάδες 1,3*

ΘΕΜΑ 2° (A) Έστω $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}$ και $W = [(-1, -1, 1)]$ γραμμικοί υπόχωροι του \mathbb{R}^3 .

(α) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση των $U, V, U + V, U \cap V$ και να επαληθευθεί το Θεώρημα Διάστασης για διανυσματικούς χώρους. *Μονάδες 1.5*

(β) Να δειχθεί ότι $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$. *Μονάδες 1*

(B) Να δειχθεί ότι το άθροισμα $U + W$ δύο υπόχωρων U, W ενός διανυσματικού χώρου V είναι επίσης υπόχωρος του V . *Μονάδες 1*

ΘΕΜΑ 3° Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, x + y - 2z, x - 2y + z).$$

(α) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την συνήθη βάση του \mathbb{R}^3 . *Μονάδες 0,5*

(β) Βρείτε τον πυρήνα $\text{Ker } f$ της f , μία βάση του και δώστε την γεωμετρική του ερμηνεία. *Μονάδες 1*

(γ) Βρείτε την εικόνα $\text{Im } f$ της f , μία βάση της και δώστε την γεωμετρική της ερμηνεία. *Μονάδες 1*

(δ) Διατυπώσατε το Θεώρημα Διάστασης για γραμμικές απεικονίσεις και επαληθεύστε το για την f . *Μονάδες 0.5*

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 45 λεπτά

Καλή επιτυχία!