ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»

24 Ιανουαρίου 2017

A

ΘΕΜΑ 1ο

(A) Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : 2x+y+z-6=0,\ x+2y-z-3=0 \text{ και } \varepsilon_2 : x=2+t,\ y=1-2t,\ z=1+3t,\ t\in\mathbb{R}..$$

(α) Να βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας ε_1 και της ευθείας ε_2. ***Μονάδες 0,8***

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι συνεπίπεδες και να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν. ***Μονάδες 1***

(B) Η καμπύλη γ είναι η τομή των επιφανειών (Ε): $x^2+y^2+z^2-12z=0$ και (Π): $y+z-12=0$. Να αναγνωρίσετε την επιφάνεια (Ε) και να βρείτε την ορθή προβολή γ_0 της καμπύλης γ στο επίπεδο $z=0$. Στη συνέχεια να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης γ .

Μονάδες 1,7

ΘΕΜΑ 2ο

(A) Έστω $W_1=[(1,2,-1),(1,-1,1)]$ και $W_2=\{(x,y,z):11x+2y+z=0\}$ υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση των υπόχωρων W_1, W_2 , W_1+W_2 , $W_1\cap W_2$ του $\mathbb{R}^3$ και να επαληθευθεί το Θεώρημα Διάστασης.

Μονάδες 1.5

(B) Να λυθεί για τις διάφορες τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$, με την μέθοδο απαλοιφής Gauss, το σύστημα

$$\begin{aligned} x \quad\ \ + z &= 1 \\ bx - y + az &= -1 \\ x + by + z &= a \end{aligned}$$

Μονάδες 1.5

ΘΕΜΑ 3ο

(A) Να αποδείξετε ότι μία γραμμική απεικόνιση $f:V\to U$, όπου V,U διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα K , είναι ένα-προς-ένα, αν, και μόνον αν, ο πυρήνας της είναι ο τετριμμένος υπόχωρος $\{0_V\}$ του V.

Μονάδες 1

(B) Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x,y,z)=(2x-y-z,x-y,x+y-2z)$$

(α) Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. ***Μονάδες 0.5***

(β) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του πυρήνα και της εικόνας της f και να επαληθευθεί το Θεώρημα Διάστασης για γραμμικές απεικονίσεις ***Μονάδες 1***

(γ) Είναι η f ένα-προς-ένα; Είναι η f επί; ***Μονάδες 1***

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!