ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ και ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κανονική εξέταση στο μάθημα ΦΥΣΙΚΗ Ι 28 Φεβρουαρίου 2004

Διδάσκοντες: Λ. Απέκης, Ρ. Βλαστού, Κ. Χριστοδουλίδης

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες. Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Θέμα 1. (α) Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο της Γης είναι $U(r) = -\dfrac{GMm}{r}$, όπου M είναι η μάζα της Γης και G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Δείξετε ότι, για μικρά ύψη y πάνω από την επιφάνεια της Γης, προσεγγιστικά ισχύει η σχέση $U(y) = U_0 + mg_0 y$ και βρείτε τις τιμές των U_0 και g_0. Δίνεται το ανάπτυγμα $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots$.

(β) Ένας σφαιρικός πλανήτης έχει μάζα M και ακτίνα R, δεν περιστρέφεται και δεν έχει ατμόσφαιρα. Από ένα σημείο του πλανήτη εκτοξεύεται ένα βλήμα, με αρχική ταχύτητα υ_0 σε οριζόντια διεύθυνση (δηλ. εφαπτομενικά ως προς την επιφάνεια του πλανήτη). Το βλήμα φθάνει σε μέγιστη απόσταση R_1 από το κέντρο του πλανητη, όπου και έχει ταχύτητα υ_1. Δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+R/R_1}}$. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της υ_0 για την οποία το βλήμα απομακρύνεται σε άπειρη απόσταση από τον πλανήτη (ταχύτητα διαφυγής);

Θέμα 2. Σώμα μάζας $m = 1$ kg μπορεί να κινείται κατά μήκος του άξονα των x. Η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη σχέση $U(x) = x^2(3-x)$ για $-\infty < x < \infty$, σε μονάδες S.I.

(α) Σχεδιάστε πρόχειρα τη συνάρτηση $U(x)$.

(β) Βρείτε τη δύναμη $F(x)$ που ασκείται πάνω στο σώμα, τα σημεία ισορροπίας, καθώς και το είδος της ισορροπίας στο καθένα.

(γ) Αν το σώμα βρίσκεται αρχικά στο σημείο $x = 0$ και του δοθεί ταχύτητα $\mathbf{v}_0 = 3\hat{\mathbf{x}}$ m/s, να αποδείξετε ότι θα καταφέρει να φτάσει σε άπειρη απόσταση από το $x = 0$. Ποια θα είναι η ελάχιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα σ' αυτήν τη διαδρομή και πού θα συμβεί αυτό;

Θέμα 3. Λεπτή ευθύγραμμη ράβδος ΑΒ έχει μήκος ℓ και γραμμική πυκνότητα μάζας (μάζα ανά μονάδα μήκους, $\lambda = dm/dx$) που δίνεται από τη σχέση $\lambda(x) = \lambda_0\left(1 + \dfrac{x}{\ell}\right)$, όπου x είναι η απόσταση από το άκρο Α της ράβδου και λ_0 μια θετική σταθερά.

(α) Δείξετε ότι η μάζα της ράβδου είναι $M = \frac{3}{2}\lambda_0 \ell$.

(β) Δείξετε ότι το κέντρο μάζας της ράβδου βρίσκεται στο σημείο $x_{CM} = \frac{5}{9}\ell$.

(γ) Δείξετε ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το άκρο Α ($x = 0$) και είναι κάθετος στη ράβδο είναι $I_A = \frac{7}{18}M\ell^2$.

⇒⇒⇒

(δ) Η ράβδος μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Α και είναι κάθετος στη ράβδο. Αρχικά η ράβδος είναι κατακόρυφη, με το άκρο Β ($x = \ell$) κάτω από το Α. Αν η ράβδος μετατοπισθεί από τη θέση ισορροπίας της κατά μία μικρή γωνία ως προς την αρχική της θέση και αφεθεί ελεύθερη να κινηθεί, διατυπώστε την εξίσωση κίνησης της ράβδου ως συνάρτηση της γωνίας θ που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφη κατεύθυνση. Δείξετε ότι για ταλαντώσεις μικρού πλάτους η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{7\ell}{10g}}$.

Θέμα 4. Ένα σωματίδιο S, που έχει μάζα ηρεμίας M, είναι ακίνητο στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου. Το σωματίδιο διασπάται σε ένα σωματίδιο S΄ με μάζα ηρεμίας $M/2$ και σε ένα φωτόνιο. Να βρείτε:

(α) Την ταχύτητα του παραγόμενου σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου.

(β) Την ενέργεια του φωτονίου,

(i) στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου, E_γ, και

(ii) στο σύστημα αναφοράς του παραγόμενου σωματιδίου, E'_γ.

Γενικό Τυπολόγιο

$$\vec{\mathbf{L}} = M\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} \qquad \vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \qquad \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{N}}$$

<u>Σχετικιστική Κινηματική:</u>

Αν ένα σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\,\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς S και οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$, τότε:

$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \qquad \beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta l = \Delta l_0/\gamma \qquad \Delta t = \gamma\,\Delta t_0 \qquad \upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}}, \qquad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}$$

<u>Σχετικιστική Δυναμική:</u>

$$m_0 = m(0) \qquad p = \gamma m_0 \upsilon \qquad E = \gamma m_0 c^2 \qquad m = m(\upsilon) = \gamma m_0 \qquad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right) \qquad p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z \qquad E' = \gamma(E - c\beta\, p_x)$$

Για φωτόνια: $E = pc$