Τ.Ε.Μ.Φ.Ε. 1ο Εξάμ. Φεβρουάριος 2000

Γραμμική Αλγεβρα

Ονοματεπώνυμο ....

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Α. Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ είναι ένα ορθοκανονικό υποσύνολο διανυσμάτων του V, να δειχθεί ότι τα x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Β. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεθεί ένας πίνακας που να διαγωνοποιεί τον A.
β) Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας που να διαγωνοποιεί τον A.

Θέμα 2. Α. Εστω U, V διανυσματικοί χώροι πάνω στο ίδιο σώμα K και μια γραμμική απεικόνιση $T : U \to V$. Να δειχθεί ότι η T είναι "$1-1$" αν και μόνο αν $\mathrm{Ker}T = \{0\}$. ($\mathrm{Ker}T = \mathcal{N}(T)$ ο πυρήνας της T).

Β. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$T : R^3 \to R^3 : \; T(x, y, z) = (x + (3-k)z,\; 3x + y,\; x - 3y - 5kz), \; k \in R.$$

α) Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση.
β) Να βρεθεί μια βάση του $\mathrm{Im}T$. (όπου $\mathrm{Im}T = \mathcal{R}(T)$ το σύνολο τιμών της T). και η διάσταση του $\mathrm{Ker}T$ για τις διάφορες τιμές του $k \in R$.

Θέμα 3. Δίνονται το επίπεδο $(\pi_1) : \; 2x + y - z = 0$, η ευθεία $(\varepsilon_1) : \; x = z, \; y = 3z$ και το σημείο $A(-1, 0, 2)$. Να βρεθούν:

1) Η εξίσωση του επιπέδου (π) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλο στο (π_1).
2) Το σημείο τομής B της (ε_1) και του (π).
3) Η ευθεία που διέρχεται από το A, είναι παράλληλη προς το (π_1) και τέμνει την (ε_1).
4) Το συμμετρικό του B ως προς το επίπεδο (π_1).

Θέμα 4. Α. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο R^3 και τα υποσύνολά του

$$V_1 = \{(x, y, z) : \; z = 2x - y\}, \; V_2 = \{(x, y, z) : \; 2x + y - z = 0\}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι τα V_1, V_2 είναι υπόχωροι του R^3.
β) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του $V_1 \cap V_2$
γ) Να δειχθεί ότι είναι $R^3 = V_1 + V_2$ και να εξετασθεί αν είναι $R^3 = V_1 \oplus V_2$.

Β. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -12 & 7 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος **Cayley-Hamilton** να υπολογιστεί ο πίνακας A^ν, $\nu \in \mathcal{N}$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Καλή επιτυχία !