

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ-ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2004

Θέμα 1^ο.

Έστω U ο υπόχωρος του \mathbb{R}^4 που παράγεται από τα στοιχεία

$(1, -1, 1, \alpha), (2, 1, 0, \beta), (5, -2, 3, \gamma)$ και $(3, -3, 3, \delta)$.

(I) Να προσδιορίσετε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των α, β, γ και δ έτσι ώστε να ισχύει:

(α) $\dim U = 2$ και (β) $\dim U = 3$

(II) Να εξετάσετε, αν το καθένα από τα σύνολα

$A = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \dim U = 2\}$ και $B = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \dim U = 3\}$

είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^4 . Στην περίπτωση που είναι υπόχωρος, να προσδιορίσετε μία βάση του και τη διάστασή του.

Θέμα 2^ο.

(α) Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} και

$T: X \rightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ είναι βάση

του $\ker T = N(T)$ και $\{u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ είναι βάση του X .

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{T(u_{r+1}), \dots, T(u_n)\}$ είναι βάση του $\text{Im } T$.

(β) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $(A - \alpha I_3)^3 = O$.

(β) Αν $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσετε τον A^{-1} .

Θέμα 3^ο.

Έστω $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y, z) = (3x - 2y, x - y - z, x + z)$$

και ο υπόχωρος $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$ του \mathbb{R}^3 .

(α) Να αποδείξετε ότι η T είναι 1-1.

(β) Να βρείτε μία βάση του U και μία βάση του $T(U)$.

(γ) Να βρείτε τον πίνακα της T ως προς τη βάση

$u = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}$ του \mathbb{R}^3 .

Θέμα 4^ο.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \frac{x-1}{2} = y - \frac{z+1}{3}$ και $\varepsilon_2: \begin{cases} x - y + 2z - 6 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$

(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται και να προσδιορίσετε το σημείο τομής τους.

(β) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π που ορίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .

(γ) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ε_1 και είναι κάθετο στο επίπεδο Π .

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία