ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2002

Να απαντήσετε και στα 4 παρακάτω ισοδύναμα θέματα :

1. **(α)** Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π), που είναι κάθετο στο επίπεδο (Σ) με εξίσωση x-y+z=1 και περιέχει την ευθεία (ε): x=y=t, z=1, $t\in\mathbb{R}$.

(β) Δίνονται τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ του χώρου $D=\Delta^3$ των ελεύθερων διανυσμάτων. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\chi}\in\Delta^3$ που είναι τέτοια ώστε να ισχύει $\vec{\chi}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\chi}\cdot\vec{\beta}=\vec{\chi}\cdot\vec{\gamma}=0$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι μη συνεπίπεδα.

(ii) Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα και τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά.

(iii) Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

2. **(α)** Να αποδείξετε ότι σ' ένα διανυσματικό χώρο U με dimU=n, αν το σύνολο $B=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ είναι μία βάση του U, τότε κάθε $x\in U$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του B.

(β) Θεωρούμε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^5$:

$$V_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : x_1-x_3-x_4=0\},$$
$$V_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : x_2=x_3=x_4,\ x_1+x_5=0\}$$

Να αποδείξετε ότι είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να βρείτε βάσεις και τις διαστάσεις των υποχώρων $V_1, V_2, V_1+V_2, V_1\cap V_2$.

3. **(α)** Έστω U διανυσματικός χώρος και $T:U\to U$ μία γραμμική απεικόνιση. Αν ο πυρήνας $N(T)=\ker T$ της T είναι ο μηδενικός υπόχωρος (δηλαδή $N(T)=\mathrm{Ker}T=\{0\}$) και τα $u_1,u_2,\ldots,u_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του U, να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $T(u_1),T(u_2),\ldots,T(u_k)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(β) Η γραμμική απεικόνιση $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ έχει πίνακα τον $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -3 & -1\end{pmatrix}$, ως προς τη βάση $u=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

(i) Να βρείτε τον πίνακα της T, ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(ii) Να βρείτε μία βάση του πυρήνα και μία βάση της εικόνας Im(T)=R(T) της T.

4. **(α)** Έστω AX=B (1) ένα $m\times n$ γραμμικό σύστημα. Αν $\Lambda=\{X\in M_{n\times1}=\Pi_{n\times1} : AX=B\}$ είναι το σύνολο των λύσεων του (1), $\Lambda_0=\{X\in M_{n\times1}=\Pi_{n\times1} : AX=O\}$ το σύνολο των λύσεων του αντιστοίχου ομογενούς και $\xi\in\Lambda$ είναι μία λύση του (1), να δείξετε ότι το Λ_0 είναι υπόχωρος του $\Pi_{n\times1}$, να δώσετε τη διάστασή του και να γράψετε τη μορφή των λύσεων του (1) συναρτήσει των ξ και Λ_0.

(β) Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned}2x+5y+5z+6w&=\alpha\\ x+3y+4z+4w&=\beta\\ -3x-5y\quad -4w&=\gamma\\ x+2y+z+2w&=\delta\end{aligned}\qquad(\Sigma)$$

(i) Να βρεθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το (Σ) να είναι συμβιβαστό.

(ii) Να βρεθεί μία βάση του υπόχωρου $U=\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 : \text{το } (\Sigma) \text{ είναι συμβιβαστό}\}$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες **Καλή επιτυχία !**