

# ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

## ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

3-3-2006

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>** Δίνεται η ευθεία (ε):  $x - 4 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  και τα σημεία  $A(2, -3, 1)$  και  $B(-1, 1, 4)$ .

- (i) Ναδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τα σημεία  $A$ , και  $B$  είναι το επίπεδο (π):  $3x - 4y - 3z + 2 = 0$ .
- (ii) Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας (ε) με το επίπεδο (π).
- (iii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ευθεία (ε) και είναι κάθετο στο (π).

Μονάδες 2

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup> (α)** Δίνονται τα υποσύνολα του  $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 3z = 0\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}.$$

Ναδειχθεί ότι τα  $V_1, V_2$  είναι υπόχωροι του  $\mathbb{R}^3$ , να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων  $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$  και να δοθεί η γεωμετρική τους ερμηνεία.

**(β)** Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα  $K$ .

- (i) Να δοθεί ο ορισμός των εννοιών: «γραμμική ανεξαρτησία» και «γραμμική εξάρτηση» διανυσμάτων του χώρου  $V$  και να δώσετε για κάθε μια έννοια ένα παράδειγμα.
- (ii) Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του  $V$ . Ναδειχθεί ότι αν το στοιχείο  $v \in V$  δεν ανήκει στην γραμμική θήκη των  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , τότε τα  $x_1, x_2, \dots, x_n, v$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Μονάδες 3

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , η οποία έχει πίνακα, ως προς την κανονική βάση  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  του  $\mathbb{R}^3$ , τον:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Βρείτε τον τύπο της  $T$ .
- (ii) Βρείτε μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της  $T$  και επαληθεύστε το Θεώρημα Διάστασης Γραμμικών Απεικονίσεων.
- (iii) Θεωρούμε τη βάση  $\nu = \{\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3\}$  του  $\mathbb{R}^3$ , όπου  $\bar{\nu}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ ,  $\bar{\nu}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$  και  $\bar{\nu}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_3$ . Βρείτε τον πίνακα  $B$  της  $T$  ως προς τη βάση  $\nu$ .

Μονάδες 2,5

Συνεχίζεται πίσω

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

(α) Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ax_1 + ax_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ax_1 + ax_2 + ax_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

(β) Να υπολογιστεί ο πίνακας  $A$  αν γνωρίζουμε ότι όλα τα στοιχεία του είναι θετικά και ότι ο συμπληρωματικός (adjoint) πίνακας του  $A$  είναι ο

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Μονάδες 2,5**

*Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.*

*Καλή επιτυχία*