

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα»

Σεπτέμβριος 2000

Όνοματεπώνυμο: _____

ΘΕΜΑ 1 : Α) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: X \rightarrow X$ που είναι «επί» και τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\{u_1, \dots, u_k\}$ του X . Ναδειχθεί ότι τα διανύσματα $\{T(u_1), \dots, T(u_k)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Β) Δίνεται ο υπόχωρος V_1 του R^3 που παράγεται από τα διανύσματα $\{(5, 3, 8), (1, 3, 4)\}$ και ο υπόχωρος V_2 του R^3 που παράγεται από τα διανύσματα $\{(2, -1, 2), (0, -1, 1)\}$. (I) Να βρεθεί ο υπόχωρος $V_1 \cap V_2$ και να ερμηνευθούν γεωμετρικά οι V_1 , V_2 και $V_1 \cap V_2$. (II) Ναδειχθεί ότι: $R^3 = V_1 + V_2$.

ΘΕΜΑ 2: Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 25 & 0 \\ -12 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

- (I) Να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας που να διαγωνοποιεί τον A .
- (II) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $B = A^{100} - 2A^2 + I$ και να δικαιολογήσετε γιατί ο B είναι αντιστρέψιμος.
- (III) Να βρεθεί πίνακας M τέτοιος ώστε $M^3 = A$.

ΘΕΜΑ 3 : Δίνεται το σημείο $A(1, 0, -1)$ και η ευθεία (ε)
 $x - 3 = \frac{y - 4}{3} = 2 - z$.

- I) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που διέρχεται από το A και είναι κάθετο στην (ε) .
- II) Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε) .
- III) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από το A και την (ε) .

Διάρκεια εξέτασης 2 30'.

Καλή επιτυχία !