

Όνοματεπώνυμο:.....

ΘΕΜΑ 1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$x + y + z + w = \alpha$$

$$2x - y + 3z - w = \beta$$

$$4x - 5y + 7z - 5w = \gamma$$

$$x - 2y - 2z - 2w = \delta$$

με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο

$U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : (\Sigma) \text{ συμβιβαστο}\}$ είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^4 και να βρείτε μία βάση του.

ΘΕΜΑ 2. Η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ απεικονίζει κάθε σημείο του χώρου στην ορθή προβολή του πάνω στο επίπεδο (π) με εξίσωση $x - y - z = 0$.

(α) Να βρεθεί ο τύπος της T και να αποδειχθεί ότι είναι γραμμική.

(β) Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

(γ) Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $\ker T$ και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του συνόλου $\ker T$.

Θέμα 3. Θεωρούμε τις ευθείες $(\epsilon_1): 2x + 3y = 2, x - 3z = 4, (\epsilon_2): x = 2 = z - y$.

(α) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις των εθειών $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$.

(β) Να βρεθεί η αναλυτική εξίσωση του γεωμετρικού τόπου (τ) των σημείων του χώρου που είναι μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AB με $A \in (\epsilon_1), B \in (\epsilon_2)$.

(γ) Να εξετάσετε τη θέση των ευθειών $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ ως προς το επίπεδο

$(\pi): x + y - z - 1 = 0$.

.....
Μόνο για τους εγγραφέντες το έτος 1999

(απαντήστε στο θέμα 4 και σε δύο από τα παραπάνω)

ΘΕΜΑ 4. Δίνονται οι πίνακες A και $B = A^4 - 8A^3 + 21A^2 - 19A + I$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(α) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A .

(β) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα B , αφού πρώτα τον εκφράσετε ως πολώνυμο του A με τον μικρότερο δυνατό βαθμό.