

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Α ΕΞΑΜΗΝΟΥ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004**

Θέμα 1^ο.

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = -z+2$ και η οικογένεια επιπέδων με εξίσωση

$$\Pi_k: 2x+3y+kz-k-12=0, k \in \mathbb{R}.$$

- (i) Βρείτε τα κοινά σημεία της ε με το επίπεδο $\Pi_k, k \in \mathbb{R}$.
 (ii) Για ποια τιμή του k η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο Π_k ;
 (iii) Για $k=2$, να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Q που περιέχει την ευθεία ε και είναι κάθετο προς το επίπεδο Π_2 .

Μονάδες 3

Θέμα 2^ο.

(A) Θεωρούμε στον \mathbb{R}^3 το σύστημα

$$\begin{aligned} (a-1)x + (a-1)y &= 1-a \\ ay + az &= 2(a-1) \\ (a^2-a)x + (a^2-a)z &= 0 \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

- (i) Προσδιορίστε το σύνολο των λύσεων E_a του συστήματος (Σ) , για $a \in \mathbb{R}$.
 (ii) Στην περίπτωση που το σύνολο E_a περιέχει έναν άπειρο αριθμό λύσεων, τότε:
- να αποδείξετε ότι το σύνολο E_a είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^3 και
 - να βρείτε μία βάση του.

Μονάδες 2,5

(B) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A \in \Pi_{v \times v}(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός, αν, και μόνον αν,

$$X^T AY = Y^T AX, \text{ για κάθε } X, Y \in \Pi_{v \times 1}(\mathbb{R}).$$

(Υπόδειξη: Προσδιορίστε, για δεδομένους δείκτες i, j με $1 \leq i, j \leq v$, κατάλληλους

$$v \times 1 \text{ πίνακες } X, Y \text{ τέτοιους ώστε } X^T AY = a_{ij})$$

Μονάδες 1,5

Θέμα 3^ο.

Έστω $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $T(1, 0, 2, -1) = (2, 0, 4)$ και με πίνακα ως προς την κανονική βάση του κάθε χώρου

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & k \\ k & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & k+1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι είναι $k=1$ και κατόπιν να βρείτε τον τύπο της T .
 (ii) Να βρείτε μία βάση του πυρήνα και της εικόνας της T και να επαληθεύσετε το θεώρημα διαστάσεως. Είναι η απεικόνιση T “επί”;

Μονάδες 3

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά.

Καλή επιτυχία