ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1-9-2005

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος ενός συμμετρικού πίνακα, αν υπάρχει, είναι επίσης συμμετρικός πίνακας.

Β. Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(x, y, z) : x - y = 0,\ y - z = 0\} \text{ και } B = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι τα A, B είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε μία βάση σε κάθε υπόχωρο.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

ΘΕΜΑ 2^o

Α. Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας $\mathrm{A} = (a_{ij})$ με $\alpha_{ij} = i + j$ και $n \geq 2$. Να αποδείξετε ότι ο βαθμός του πίνακα Α ισούται με 2.

Β. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων a, b, c έτσι ώστε τα επίπεδα

$$\Pi_1:\ 2x+3y-4z=a, \quad \Pi_2:\ 3x+4y-5z=b, \quad \Pi_3:\ 4x+5y+6z=c,$$

να έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Για $a=1$, $b=2$, $c=3$, να αποδείξετε ότι τα επίπεδα Π_1, Π_2 και Π_3 περιέχουν την ίδια ευθεία, της οποίας να βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις.

ΘΕΜΑ 3^o

Α. Έστω U, V δύο διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα Κ και η γραμμική απεικόνιση $T : U \to V$. Να αποδείξετε ότι η T ορίζεται πλήρως, αν είναι γνωστές οι εικόνες μιας βάσης $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ του U.

Β. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, έτσι ώστε

$$T(1,1,1)=T(1,1,-1)=(0,0,0) \text{ και } T(-1,0,1)=(2,0,-2).$$

(i) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω σχέσεις ορίζουν πλήρως την T.

(ii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $R(T)= \operatorname{Im} T$ και μια βάση του πυρήνα $\ker T$ της T.

(iii) Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς την βάση $B=\{ (1,1,1), (1,1,-1), (-1,01)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Καλή επιτυχία