ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

20-1-2005

ΘΕΜΑ 1° Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,1,2)$ και $\vec{\beta} = (-1,0,1)$.

(i) Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}$ κάθετο στα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(ii) Να βρεθεί μία εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων κα είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

(iii) Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $M(13,0,20)$ ως προς το επίπεδο (Π) με εξίσωση $10x+3y-z=0$.

ΘΕΜΑ 2° Δίνονται τα υποσύνολα

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}, \quad Q = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

του διανυσματικού χώρου των 2×2 πραγματικών πινάκων $M_2(\mathbb{R}) = \Pi_2(\mathbb{R})$.

(i) Να εξετάσετε αν αυτά είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$ και, αν είναι υπόχωροι, να βρείτε μία βάση τους.

(ii) Να επεκτείνετε τη βάση που θα βρείτε σε βάση του $M_2(\mathbb{R})$.

ΘΕΜΑ 3° Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: D \to D$, όπου D είναι το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου, με τύπο

$$T(\vec{u}) = \vec{a} \times \vec{u}, \text{ όπου } \vec{a} = (1,1,1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

(i) Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ του D.

(ii) Να βρεθεί ο πυρήνας $\mathbf{Ker}T$ της T και μία βάση του.

(iii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $\operatorname{Im} T$ της T.

ΘΕΜΑ 4° (A) Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n και $f: V \to V$ μία γραμμική απεικόνιση. Να αποδείξετε ότι :

η απεικόνιση f είναι 1-1, αν, και μόνον αν, για οποιοδήποτε υποσύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων του V και για κάθε $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, το σύνολο $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

(B) Έστω ένας 4×4 πραγματικός πίνακας M τέτοιος ώστε

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot M^T - M^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot M = O.$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει 4×1 πίνακας B τέτοιος ώστε το γραμμικό σύστημα $MX = B$ να έχει μοναδική λύση.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα. *Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.* *Καλή επιτυχία*