ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι 14/02/2003

Διδάσκων Β. Κανελλόπουλος

Θέμα 1. (i) Δώστε τον ορισμό του supremum ενός μη κενού άνω φραγμένου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$. Διατυπώστε το αξίωμα της πληρότητας του $\mathbb{R}$.

? (ii) Δείξτε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο και με βάση αυτό δείξτε ότι $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

(iii) Έστω $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ άνω φραγμένο και $s = \sup A$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A ώστε $a_n \to s$.

Θέμα 2. (i) Δώστε τον ορισμό της σύγκλισης μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν $a_n \to a$ και $\beta_n \to \beta$ τότε $a_n + \beta_n \to a + \beta$.

(ii) Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \beta_n = \sqrt[n]{n^2 + 5n + 6}, \quad \gamma_n = \sqrt[n]{n^5 + 5^n}.$$

Θέμα 3. (i) Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της f βαθμού n με κέντρο ένα $x_0 \in \mathbb{R}$. Εφαρμόστε τον παραπάνω τύπο για τη συνάρτηση $f(x) = e^{e^x}$, $n = 3$ και $x_0 = 0$.

(ii) Δείξτε ότι αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$. Ισχύει το αντίστροφο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(iii) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \qquad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n \qquad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad ? \ (\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Θέμα 4. (i) Έστω $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Δώστε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας της f στο x_0 και δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο x_0 τότε για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X με $x_n \to x_0$ έπεται ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

(ii) Έστω $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ φραγμένο και $f : X \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι το $f[X]$ είναι φραγμένο.

Θέμα 5. (i) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν x ρητός και $f(x) = 0$ αν x άρρητος δεν είναι ολοκληρώσιμη.

(iii) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx \qquad \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$$