

Εξετάσεις στο Μάθημα Ανάλυση Ι

Θέμα 1^{ov}

- (i) Διατυπώστε την ιδιότητα της πληρότητας του \mathbb{R} . (Δώστε όλους τους αναγκαίους ορισμούς, δηλαδή του φραγμένου συνόλου και του supremum).
- ~~(ii)~~ Δείξτε ότι το \mathbb{N} δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} .
- ~~(iii)~~ Δείξτε ότι αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$ τότε υπάρχει q ρητός ώστε $\alpha < q < \beta$.
- (iv) Δείξτε ότι κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι όριο αύξουσας ακολουθίας ρητών.

Θέμα 2^{ov}

- (i) Δώστε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy και δείξτε ότι αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, τότε η $(a_n)_n$ είναι ακολουθία Cauchy.
- ~~(ii)~~ Διατυπώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας σειράς και το κριτήριο Cauchy για σύγκλιση σειρών.
- ~~(iii)~~ Εξετάστε ως προς την σύγκλιση (χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου ή σύγκρισης) τις παρακάτω σειρές:

~~(α)~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n}$

(β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

~~(γ)~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$

Θέμα 3^{ov}

- ~~(i)~~ Έστω $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ και $\alpha \in X \subseteq \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο α και δείξτε ότι αν f συνεχής στο α τότε για κάθε $(\alpha_n)_n \subseteq X$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = f(\alpha)$.
- ~~(ii)~~ Έστω $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας της f και δείξτε ότι αν η f είναι Lipschitz τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής.
- (iii) Δείξτε ότι:
- (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 1$ είναι Lipschitz και $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- (b) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$, $x > 0$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4^{ov}

- ~~(i)~~ Αν $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \eta\mu x \, dx$ τότε δείξτε ότι

$$I_n = n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n \cdot (n-1) \cdot I_{n-2} \quad (\text{για } n \geq 2).$$

- ~~(ii)~~ Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

~~(α)~~ $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} \, dx$

~~(β)~~ $\int \frac{-x^2+3x+1}{x^3-2x^2+x} \, dx$

(γ) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+5} \, dx$