

Ομάδα Α.

Θέμα 1. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^y + z, e^z + xe^y, x + ye^z).$$

- A. Να βρεθεί διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\nabla f = \mathbf{F}$, $f(1, 0, 0) = 4$.
 B. Να αποδειχτεί ότι για μια C^1 -τάξης συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και μια απλή λεία χαμπύλη $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ με ίχνος στο πεδίο ορισμού της f ισχύει $\int_{\mathbf{r}} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$.
 Γ. Χρησιμοποιώντας τα ερωτήματα A και B, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi})$, $t \in [0, 2\pi]$.

Θέμα 2. Δίνεται η επιφάνεια $S : z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ με $(x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ και το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$.

A. Αφού κάνετε το σχετικό σχήμα, να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\nabla \times \mathbf{F}$ στην όψη της επιφάνειας S με κάθετο διανυσματικό πεδίο \mathbf{n} για το οποίο $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$.

B. Χρησιμοποιώντας το σύνορο του D να αποδείξετε ότι το σύνορο $c = \partial S$ της επιφάνειας έχει μια παραμετρική παράσταση $c(t) = (\cos t, 2 \sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$ με προσανατολισμό συμβατό (κατά το θεώρημα Stokes) με αυτόν της επιφάνειας.

Γ. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \mathbf{F} στην $c(t) = (\cos t, 2 \sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δ. Να διατυπώσετε το θεώρημα Stokes και να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του για τα \mathbf{F}, S και $c = \partial S$ και αν αυτό επαληθεύεται από τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα.

Ε. Χωρίς να κάνετε κανέναν επιπλέον υπολογισμό, να βρείτε την τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος του διανυσματικού πεδίου $\nabla \times \mathbf{F}$ στην επίπεδη επιφάνεια $S_1 : z = 1$, $(x, y) \in D$, με προσανατολισμό $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$.

Θέμα 3. A. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I = \iiint_D 1 dx dy dz$ όπου D είναι το ελλειψοειδές $\{(x, y, z) : \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + z^2 \leq 1\}$ και τους μετασχηματισμούς

$$T_1 : \begin{cases} x = 2x' \\ y = 3y' \\ z = z' \end{cases} \text{ και } T_2 : \begin{cases} x' = r \sin \phi \cos \theta \\ y' = r \sin \phi \sin \theta \\ z' = r \cos \phi \end{cases} \quad 0 \leq r, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

από τους οποίους ο T_2 είναι ο γνωστός μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες. Αφού μετασχηματίσετε το I πρώτα ως προς τον T_1 και το εξαγόμενο ως προς τον T_2 , υπολογίστε το ολοκλήρωμα και τον όγκο του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + z^2 \leq 1$.

B. Διατυπώστε το θεώρημα του Gauss και χρησιμοποιώντας το, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = \frac{x}{2}\mathbf{i} + \frac{y}{2}\mathbf{j} + \frac{z}{2}\mathbf{k}$ πάνω στο ελλειψοειδές $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + z^2 = 1$.

Θέμα 4. A. Δίνεται ο τόπος $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x + 2, y \leq 4 - x^2\}$ και το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (y, 2x)$. Να υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial D} \mathbf{F} d\mathbf{r}$ με τη βοήθεια ενός διπλού ολοκληρώματος.

B. Υπολογίστε το $\iint_D (x+y)^2 e^{x-y} dx dy$ όπου D το χωρίο που ορίζεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, και $x-y=1$.

Η εξέταση διαρκεί 3 ώρες.
 Καλή επιτυχία.