ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκοντες: Ι. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου **11-07-2005**

1. Δίνεται η εξίσωση $f(x)=2-x-\ln x=0$ (1)

α) Να δειχθεί ότι η (1) έχει μία μοναδική ρίζα $\overline{x}$ στο R, και επιπλέον ότι ισχύει $\overline{x}\in[1.5,1.6]$

β) Να γίνουν τρεις επαναλήψεις της μεθόδου της Διχοτόμησης με αρχικό διάστημα $[1.5,1.6]$, για να βρεθεί μία προσέγγιση της ρίζας $\overline{x}$ της (1).

Να αποδειχθεί η γενική εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου, και εν συνεχεία να βρεθεί πόσο το πολύ απέχει η Τρίτη προσέγγιση που υπολογίσατε από την ρίζα $\overline{x}$ της (1).

γ) Να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson, με αρχική προσέγγιση την τρίτη επανάληψη της Διχοτόμησης.

2. α) Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange $p(x)$ για την συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x)$ στα σημεία $x_0=0, x_1=1/4, x_2=1/2, x_3=3/4$.

β) Να δοθεί άνω φράγμα του σφάλματος $|f(x)-p(x)|$, για $x=1$ και για $x=1/3$.

γ) Να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$x_0^4 L_0(x)+x_1^4 L_1(x)+x_2^4 L_2(x)+x_3^4 L_3(x)=x^4-(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

$$\left\{f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right\}.$$

3. α) Να υπολογιστεί ο απλός τύπος Simpson χωρίς όρο σφάλματος, για την προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος.

β) Δίνεται το ολοκλήρωμα $I=\int_1^2 \ln x\,dx$. Να προσεγγίσετε το ολοκλήρωμα αυτό όταν $h=0.25$, με τον σύνθετο Simpson. Αν ο σύνθετος τύπος Simpson εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του I με σφάλμα το πολύ $\frac{1}{2}\times10^{-4}$, πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν.

$\left(E_S=\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \right)$.

4. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix}10 & 1 & 1\\ 3 & 20 & -1\\ 1 & 1 & 8\end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}15\\ 23\\ 11\end{pmatrix} \qquad (2)$$

α) Να υπολογιστεί ο επαναληπτικός τύπος ή οι επαναληπτικές εξισώσεις της μεθόδου Jacobi και να ελεγχθεί η σύγκλιση της μεθόδου.

β) Να αποδειχθεί η γενική εκτίμηση σφάλματος

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\right\| \leq \frac{\|B\|^{k}}{1-\|B\|} \cdot \left\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\right\|$$

όπου B ο αντίστοιχος επαναληπτικός πίνακας.

γ) Να υπολογιστεί το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων της μεθόδου στο σύστημα (2) έτσι ώστε

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\right\|_{\infty} \leq 10^{-3} \cdot \left\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\right\|_{\infty}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ **☺ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30 ΩΡΕΣ ☹**