ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΈΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκοντες: Ι. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου **30-6-2003**

1. α) Έστω ότι η $f \in C^{k+1}[\alpha,\beta]$ και $x_0, x_1, \ldots, x_k$, $(k+1)$ διακεκριμένα σημεία του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Να δειχθεί ότι υπάρχει αριθμός $\xi(x)$ στο (α,β) έτσι ώστε:

$$f(x) - P_k^L(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi(x))}{(k+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{k}(x - x_i)$$

για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, όπου $P_k^L(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange.(Χρησιμοποιείστε τη βοηθητική συνάρτηση $Q(t) = f(t) - P_k^L(t) - \left[f(x) - P_k^L(x)\right] \cdot \prod_{i=0}^{k} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$.)

β) Δίνονται τα δεδομένα:

x_i	1.0	1.5	2.0	2.5
$y_i = f(x_i)$	0.0	1.25	3.0	5.25

Υπολογίστε έναν πίνακα διαφορών. Χρησιμοποιείστε τον πίνακα αυτόν για να υπολογίσετε το πολυώνυμο παρεμβολής, στην μορφή Newton, που διέρχεται από τα σημεία αυτά, και στη συνέχεια υπολογίστε μία προσέγγιση της τιμής $f(1.2)$.

γ) Χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα του ανωτέρω πίνακα, υπολογίστε μία προσέγγιση του ολοκληρώματος $I = \int_1^{2.5} f(x)\,dx$, εφαρμόζοντας κατάλληλο σύνθετο τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης **(Μονάδες 3)**

2. Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x)$:

x_i	1.0	2.0	4.0	5.0
f_i	3.14	4.99	7.92	9.19

Να υπολογιστεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων η βέλτιστη καμπύλη της μορφής $y(x) = b x^a$ που προσεγγίζει τα δεδομένα. (Για ευκολία, εφαρμόστε κατάλληλο μετασχηματισμό). **(Μονάδες 1.5)**

3. α) Να περιγράψετε τη γενική επαναληπτική μέθοδο για την επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ και να αποδειχθεί η εκτίμηση σφάλματος:

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|.$$

β) Δίνεται ο πίνακας:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Να παραγοντοποιηθεί στην μορφή $A=LU$, εφαρμόζοντας την μέθοδο Gauss χωρίς οδήγηση. Στη συνέχεια να επιλυθεί το σύστημα $Ax=b$ όπου $b=(14,12,6)^T$, με βάση την προηγούμενη παραγοντοποίηση.

γ) Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix}4 & -1\\ -4 & 4\end{bmatrix}x=b.$$

Νά υπολογιστούν οι επαναληπτικοί πίνακες B_J και B_{G-S} των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel αντίστοιχα και στη συνέχεια με βάση αυτούς να εξετάσετε αν οι αντίστοιχες επαναληπτικές μέθοδοι συγκλίνουν. **(Μονάδες 3)**

4) Δίνεται η εξίσωση $e^x-1-2x=0.$ (1)

- Να δειχθεί ότι έχει μοναδική ρίζα ρ στο $[1,2]$.
- Να εξετάσετε αν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση των γενικών επαναληπτικών μεθόδων:

  $$x_{k+1}=g_1(x_k)=\frac{e^{x_k}-1}{2}$$

  $$x_{k+1}=g_2(x_k)=\ln(1+2x_k)$$

  για κάθε x_0 στο $[1,2]$.
- Να γίνει μία επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson για τη προσέγγιση της ρίζας ρ της (1) με κατάλληλα επιλεγμένη αρχική τιμή. **(Μονάδες 2.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

① ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3.00 ΩΡΕΣ ☺