

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκοντες: Γ. Παπαγεωργίου Ι. Χρυσοβέργης

Σεπτέμβρης 2001/β

Θέμα 1 (2.5)

α) Ναδειχθεί η εκτίμηση σφάλματος της γενικής επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης ενός $n \times n$ γραμμικού συστήματος $x_k = Cx_{k-1} + d$

$$\|x_k - x\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x_{k-1} - x_k\|,$$

υποθέτοντας ότι ισχύει $\|C\| < 1$, όπου C ο πίνακας επαναλήψεων της μεθόδου.

β) Να επιλυθούν τα δύο γραμμικά συστήματα $Ax = b$ και $Ax = c$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 32 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix},$$

με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση κατά στήλη, εκτελώντας μια μόνο φορά την τριγωνοποίηση του πίνακα A .

Θέμα 2 (1.25)

Δείξτε ότι η Επαναληπτική Μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει για 2×2 γραμμικά συστήματα με πίνακα συντελεστών τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Θέμα 3 (1.25)

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα και μοναδικό πολυώνυμο, βαθμού το πολύ n , που παίρνει $n+1$ τιμές f_0, \dots, f_n σε $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία x_0, \dots, x_n .

Θέμα 4 (2.5)

Δίνεται η εξίσωση (1) $x = \frac{\cos x}{2}$ (το x σε ακτίνια).

α) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση (1) έχει μια μοναδική ρίζα στο R .

β) Ναδειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος $x_k = \frac{1}{2} \cos x_{k-1}$, x_0 δεδομένο, συγκλίνει, πρώτα για κάθε $x_0 \in [-1, 1]$, και μετά για κάθε $x_0 \in R$.

γ) Να γίνουν 5 επαναλήψεις της μεθόδου, με αρχικό $x_0 = 0.5$, και να δοθεί μία όσο το δυνατό καλύτερη εκτίμηση του σφάλματος στην πέμπτη επανάληψη

Θέμα 5 (2.5)

α) Ναδειχθεί ο σύνθετος τύπος ολοκλήρωσης Simpson καθώς και η αντίστοιχη εκτίμηση σφάλματος. {Δίνεται ο απλός τύπος Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu), \quad \mu \in [x_0, x_2]. \}$$

β) Να υπολογιστεί με το σύνθετο τύπο Simpson, με βήμα $h = 0.25$, μια προσέγγιση του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 e^{\cos x} dx \quad (\text{το } x \text{ σε ακτίνια),}$$

και να βρεθεί μια εκτίμηση του σφάλματος ολοκλήρωσης.