

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκοντες: Ι. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου

19-9-2002 / A

1. Να κατασκευαστεί (αναλυτικά ή γεωμετρικά) η μέθοδος Newton - Raphson,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,\dots$$

για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$. Ποια μέθοδος την αντικαθιστά όταν έχουμε πρόβλημα με την παράγωγο. Περιγράψατε την μέθοδο αυτή και υπολογίστε τον επαναληπτικό της τύπο.

Δίνεται το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων

$$f_1(x, y) = 4x^2 - y^2 = 0$$

$$f_2(x, y) = 4xy^2 - x - 1 = 0$$

να εκτελέσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton για τον υπολογισμό μιας ρίζας, με αρχική προσέγγιση την $(x_0, y_0) = (0, 1)^T$. ($\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{f}$, $k = 0, 1, 2, \dots$)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2}$. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής του

Lagrange στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Εν συνεχείᾳ να βρεθεί επίσης και μία εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής της μορφής: $|f(x) - p(x)| \leq M$, $\forall x \in [-1, 1]$.

$$\left\{ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\}. \quad (1.5)$$

3. a) Να περιγράψετε την γενική επαναληπτική μέθοδο για την επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$. Αναφέρατε τα βασικά κριτήρια σύγκλισης της μεθόδου.

Να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου Jacobi για την αριθμητική επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ -3 & 11 & 28 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

με αρχικό διάνυσμα $(0, 0, 0)$, και να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος στην δεύτερη επαναληψη, με νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. ($\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$).

b) Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x)$:

x_i	1.0	1.5	2.0	3.0
f_i	1.0	2.0	21.0	400.0

Να υπολογιστεί με το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων η βέλτιστη καμπύλη της μορφής $y(x) = b e^{ax}$ που προσεγγίζει τα δεδομένα. (Για ευκολία, εφαρμόστε κατάλληλο μετασχηματισμό).

(1.5)

4. Να υπολογιστεί ο απλός τύπος Simpson χωρίς όρο σφάλματος, για την προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος με όρο σφάλματος.

(Δίνεται ο όρος σφάλματος του απλού τύπου $E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$.

Δίνεται το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 x^2 \ln x dx$. Να προσεγγίσετε το ολοκλήρωμα αυτό όταν $h = 0.25$, με τον αντίστοιχο σύνθετο Simpson. Αν ο σύνθετος τύπος Simpson εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του I με σφάλμα το πολύ $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν. (2.5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

⊕ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30 ΩΡΕΣ ⊕