



ΕΞΕΤΑΣΗ 3^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2019 ΟΜΑΔΑ Β

ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ α) Να βρεθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης που έχει για θεμελιώδες σύνολο λύσεων τις συναρτήσεις $y_1(x) = x^2$ και $y_2(x) = x^3$. (μον. 0.5)

β) Τρεις λύσεις μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης είναι οι $f_1(x) = 3x - x^2$, $f_2(x) = -x^2 + 5xe^{-x}$, $f_3(x) = 2x - x^2 + 3xe^{-x}$. Να βρεθεί η γενική λύση. (μον. 1)

γ) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $y'' + 4y = t + 2 \sin 2t$. (μον. 1)

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ: α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση: $x(x-3)y'' + (x+1)y' + 7y = 0$. Βρείτε τα ιδιάζοντα σημεία της, αποφανθείτε αν είναι κανονικά ή όχι. Αν είναι κανονικά βρείτε τη δεύτρια εξίσωση και τους εκθέτες ιδιομορφίας. (μον. 1)

β) Δίνεται η εξίσωση $(x^2+1)(x+1)y'' + (x+3)y' + 3y = 0$. Να δοθεί η μορφή και το διάστημα σύγκλισης της λύσης: σε δυναμοσειρά με κέντρο το $x_0 = 2$ (όχι εύρεση της σειράς). (μον. 0.5)

γ) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση:

$$y'' + y = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < 3\pi \\ t - 3\pi, & 3\pi \leq t < \infty \end{cases} \cdot y(0) = 0, y'(0) = 0$$
 (μον.1)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να βρεθεί η γενική λύση της η δ. ε. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y^2 + 6xy - 4}{3x^2 + 4xy + 3y^2}$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ειδική λύση με $y(1) = 1$. (μον. 1)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε. $y' = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2}$. (μον. 1)

γ) Δίνεται το ΠΑΤ $y' = (t^2 + y)\sqrt{|y|}$, $y(t_0) = y_0$. Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του ty επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του Θ. ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. Να δοθεί η μορφή του αναγωγικού σχήματος του Picard που δίνει τη λύση για $y(t_0) = y_0$ με ζεύγος τιμών (t_0, y_0) δικής σας επιλογής (χωρίς να γίνουν υπολογισμοί). (μον. 0.75)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}$ όπου $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (μον. 2.25)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, L(e^{at} f(t)) = F(s-a), L(-t f(t)) = \frac{d}{ds} F(s).$$

$$L(u_a(t) f(t-a)) = e^{-as} F(s), \text{ αν } F(s) = L(f(t)) \text{ και } u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$