

ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική II

Επαναληπτική εξέταση, 30/8/2005

Διδάσκων Κ. Φαράκος.

Θέμα I. (20 μονάδες) Δείξτε ότι οι διακριτές ιδιοτιμές της ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα δεν είναι εκφυλισμένες.

β) (10 μονάδες) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα να δείξετε ότι μπορούμε να διαλέξουμε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις (δέσμιες καταστάσεις) να είναι πραγματικές.

Θέμα II. (25 μονάδες) α) Σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα να δείξετε ότι ισχύει

$$\frac{d}{dt} \langle xp \rangle = 2 \langle T \rangle - \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

όπου $H = T + V$, και T η κινητική ενέργεια.

β) Δείξτε ότι εάν το σύστημα είναι σε μια δέσμια κατάσταση το αριστερό μέλος είναι μηδέν.

γ) Δείξτε ότι $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ για τις δέσμιες καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

Θέμα III. (25 μονάδες) Σωματίδιο μάζας m κινείται μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πλάτους a ($0 < x < a$).

α) Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις Ψ_n και τις ιδιοτιμές της ενέργειας E_n του σωματιδίου.

β) Μία μικρή διαταραχή $V(x)$ προστίθεται στο σύστημα, $V(x) = -V_0$ για $0 < x < a/2$ και $V(x) = 0$ για $a/2 < x < a$, $V_0 > 0$. Να υπολογίσετε τις ενέργειες W_n του σωματιδίου σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

γ) Ομοίως όταν έχουμε $V(x) = -V_0$ για $0 < x < a/2$ και $V(x) = V_0$ για $a/2 < x < a$.

Θέμα IV. (20 μονάδες) Σωματίδιο μάζας M κινείται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R . Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας, τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις και τον εκφυλισμό.

Θέμα V. (25 μονάδες) Η κυματοσυνάρτηση του ατόμου του Υδρογόνου (υποθέτοντας άπειρη την μάζα του πυρήνα) είναι

$$\psi(r, \theta, \varphi) = c r e^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta$$

Όπου c μια σταθερά κανονικοποίησης και $a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$.

α) Υπολογίστε την z -συνιστώσα της στροφορμής L_z και τον κβαντικό αριθμό ℓ της στροφορμής.

β) Υπολογίστε την μέση τιμή της κινητικής ενέργειας του ατόμου.

γ) Υπολογίστε την ολική ενέργεια.

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\int_0^\infty r^k e^{-\frac{r}{a}} dr = k! a^{k+1}$$