ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική

Τελική εξέταση Φεβρουαρίου, 28/2/2005.

Διδάσκων Κ. Φαράκος

(25)

<u>Θέμα I.</u> Για την πυκνότητα πιθανότητας P και το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας **J** ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

Αποδείξτε αυτήν την σχέση στην Κβαντομηχανική ορίζοντας το κατάλληλο **J** δεδομένου ότι $P = \Psi(\mathbf{r},t)^* \Psi(\mathbf{r},t)$.

(35)

<u>Θέμα II.</u> Σωματίδιο μάζας m κινείται σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού μεταξύ των θέσεων –a και a.

α) Βρείτε την ενέργεια και την κυματοσυνάρτηση για την θεμελιώδη και για την πρώτη διεγερμένη στάθμη.

β) Μια μικρή διαταραχή $V(x) = \varepsilon|x|/\mathrm{a}$ προστίθεται στο σύστημα. Χρησιμοποιήστε θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης για να υπολογίσετε την μεταβολή στην ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης.

γ) Υπολογείστε την πιθανότητα μετάβασης από την θεμελιώδη στην πρώτη διεγερμένη στάθμη (του αδιατάραχτου προβλήματος) εάν η διαταραχή $V(x) = \varepsilon|x|/\mathrm{a}$ διαρκεί χρόνο Τ.

(25)

υπόδειξη: $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$

<u>Θέμα III.</u> Ένα σωματίδιο μάζας Μ κινείται ελεύθερα στο χώρο ανάμεσα σε δύο αδιαπέραστες σφαιρικές επιφάνειες με ακτίνες r=a και r=b, a<b.

α) Γράψτε την Χαμιλτονιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες και ξεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.

β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του σωματιδίου για στροφορμή ℓ ίση με μηδέν.

(30)

<u>Θέμα IV.</u> Δύο σωματίδια με spin S_1=1/2 και S_2=1 αλληλεπιδρούν τοπικά και η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι

$$H = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

Όπου Α μια σταθερά με τις κατάλληλες μονάδες.

α) Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής **S** των δύο σωματιδίων και τον εκφυλισμό σε κάθε περίπτωση.

β) Να εκφράσετε το εσωτερικό γινόμενο των δύο spin μέσω των $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ και της ολικής στροφορμής **S**.

γ) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος.

$S^2 \quad S_1^2 \quad S_2^2$

$$\vec{\nabla}(\Psi^* \vec{\nabla}\Psi) = \vec{\nabla}\Psi^* \cdot \vec{\nabla}\Psi + \Psi^* \nabla^2 \Psi$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$E_n^{(1)} = V_{nn} = \langle \Psi_n^{(0)}, V \Psi_n^{(0)} \rangle$$

$$\int x \cos^2 kx \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2kx}{4k} + \frac{\cos 2kx}{8k^2}$$

$$P_{n \to m} = | a_m^{(1)} |^2 \quad , \quad V_{mn} = \langle \Psi_m^{(0)}, V \Psi_n^{(0)} \rangle$$

$$a_m^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T V_{mn}^{(t)} e^{i\omega_{mn} t'} dt'$$

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\hbar} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right)$$