

ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική II

Τελική εξέταση Φεβρουαρίου, 24/2/2006.

Λιδάσκων Κ. Φαράκος

Θέμα I. α) Αποδείξτε την σχέση που δίνει την χρονική μεταβολή της μέσης τιμής

$$\text{ενός τελεστή } A: \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

β) Εάν H είναι η Χαμιλτονιανή ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μάζας m

και συχνότητας ω , υπολογίστε τις ποσότητες $\frac{d\langle x \rangle}{dt}$, $\frac{d\langle p \rangle}{dt}$ και δείξτε ότι

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} = -\omega^2 \langle x \rangle$$

Θέμα II. Ένα σωματίδιο μάζας m και ενέργειας $E = V_0$ προσπίπτει από αριστερά σε ένα ορθογώνιο φράγμα δυναμικού ύψους V_0 και πλάτους a . Βρείτε τον συντελεστή διέλευσης T .

Θέμα III. Η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος δύο καταστάσεων είναι ένας ερμιτιανός

πίνακας $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a \end{pmatrix}$ με $a \in \mathbb{R}$. Εάν το σύστημα είναι αρχικά στην κατάσταση

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ βρείτε την κατάσταση του συστήματος για } t \neq 0.$$

Θέμα IV. α) Γράψτε τις σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές της στροφορμής.

β) Αν $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ να δείξετε ότι $[L^2, L_k] = 0$ όπου $k = x, y, z$.

γ) Σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H = \frac{L^2}{2I} + gL_z$. I και g θετικές

σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Να βρείτε το ενεργειακό του φάσμα. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των I και g έτσι ώστε η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας να είναι διπλά εκφυλισμένη.

Θέμα V. Η συνάρτηση $\psi(\vec{r}) = cre^{-\frac{r}{a}} \cos\theta$ είναι η κυματοσυνάρτηση μιας στάσιμης κατάστασης ενός φυσικού συστήματος μάζας m το οποίο έχει δυναμική ενέργεια

$V(r) = \frac{\gamma}{r}$ και ορισμένη στροφορμή ℓ , όπου γ και a σταθερές. Να υπολογίσετε:

α) Την στροφορμή ℓ του συστήματος.

β) Την ενέργεια E του συστήματος.

γ) Την σταθερά γ .

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$J = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Με κλειστά βιβλία. Το κάθε θέμα παίρνει 25 μονάδες. Άριστα το 100.