ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ» ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 30/6/2003, ΩΡΑ:12.00

Θέμα 1° : (Μον. 1). Να διατυπωθεί η συνθήκη επιλυσιμότητας για το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y)=h(x,y), & (x,y)\in(0,a)\times(0,b), \\ u_x(0,y)=f_1(y), \quad u_x(a,y)=f_2(y), & y\in[0,b], \\ u_y(x,0)=g_1(x), \quad u_y(x,b)=g_1(x), & x\in[0,a]. \end{array}\right\}$$

Να καταγράψετε τα επιμέρους προβλήματα που πρέπει να επιλύσετε για να βρείτε τη λύση του προβλήματος.

Θέμα 2° : (Μον. 1,25). Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

$$x^2 u_x + y^2 u_y = u^2, \quad u=u(x,y),$$

όταν $u=u(x,y)=1$, πάνω στην καμπύλη $y=2x$. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία της λύσης.

Θέμα 3° : (Μον. 1.25). Να βρεθεί η συνάρτηση Green του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y)=0, & \underset{\sim}{x}=(x,y)\in(0,+\infty)\times(-\infty,\infty), \\ u(0,y)=f(y), & \end{array}\right\}$$

όπου f γνωστή συνάρτηση. Να γραφεί η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης.

(Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον $\mathbb{R}^2$:

$$E(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{x}')=\frac{1}{2\pi}\ln[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}).$$

Θέμα 4° : (Μον. 1.5). Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho,\varphi)=0, \quad 3<\rho<5, \ 0\le\varphi\le\pi,$$

$$u(3,\varphi)=6\sin\varphi, \quad u(5,\varphi)=1, \quad u(\rho,0)=u(\rho,\pi)=0.$$

Δίνεται ο διαφορικός τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Θέμα 5°: **(Μον. 2).** **(α)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x)+y'(x)+\lambda y(x)=0, \quad 0<x<L, \quad y(0)=y(L)=0.$$

(β) Να θέσετε την εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville και να δώσετε μία σχέση ορθογωνιότητας.

(γ) Να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x)+y'(x)+\Lambda y(x)=e^{x/2}, \quad 0<x<L, \quad y(0)=y(L)=0,$$

όπου $\Lambda=\frac{1}{4}+\frac{1}{L^2}$.

Θέμα 6°: **(Μον. 2).** Δίνεται μία θερμομωνωμένη λεπτή μεταλλική ράβδος μήκους L και θερμικής αγωγιμότητας 1. Αν η αρχική θερμοκρασία της είναι $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le L/2,\\ 0, & L/2<x<L\end{cases}$.

Να βρεθεί η θερμοκρασία της ράβδου σε κάθε χρονική στιγμή.

Θέμα 7°: **(Μον. 1).** Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να δείξετε ότι η λύση για το πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0,$$

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & 1<|x|\end{cases}, \quad -\infty<x<\infty,$$

είναι: $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin s\cos sx}{s}e^{-a^2s^2t}\,ds$,

(υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier).

Δίνονται:

1. $\mathcal{F}\{u(x,t)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{isx}\,dx=\hat{u}(s,t),$
2. $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(s,t)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(s,t)e^{-isx}\,ds=u(x,t),$
3. $\mathcal{F}\{u_{xx}(x,t)\}=(-is)^2\hat{u}(s,t),$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ