ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ» ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Φυσικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 5/3/2003, ΩΡΑ: 12.00

Θέμα 1° (μον. 2,5)

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(\rho,\varphi)=0, \quad 2\le\rho\le 3, \ 0\le\varphi<2\pi, \\ &\frac{\partial}{\partial n}u(2,\varphi)=5\cos\varphi, \quad 0\le\varphi<2\pi, \\ &\frac{\partial}{\partial n}u(3,\varphi)=6\cos 5\varphi, \quad 0\le\varphi<2\pi, \end{aligned}\right\},$$

όπου n είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο.

(Δίνεται ο διαφορικός τελεστής *Laplace* σε πολικές συντεταγμένες:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\ )$$

Θέμα 2° (μον. 0,75)

Να δοθεί η μορφή της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(x_1,x_2)=7x_2, \quad (x_1,x_2)\in(0,2)\times(0,5), \\ &u(0,x_2)=u(2,x_2)=0, \quad x_2\in[0,2], \\ &u(x_1,0)=u(x_1,5)=0, \quad x_1\in[0,5]. \end{aligned}\right\}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας .

Θέμα 3° (μον. 1,75)

Να βρεθεί η συνάρτηση *Green* του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(x_1,x_2)=0, \quad (x_1,x_2)\in(-\infty,+\infty)\times(0,\infty), \\ &\frac{\partial}{\partial n}u(x_1,0)=f(x_1), \end{aligned}\right\}$$

όπου n είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο και f γνωστή συνεχής συνάρτηση .Να δοθεί η λύση του προβλήματος σε ολοκληρωτική μορφή.

(Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή *Laplace* στον $\mathbb{R}^2$:

$$E(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{x}')=\frac{1}{2\pi}\ln[(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2]^{1/2}.\ )$$

Θέμα 4° (μον. 2)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & -\pi < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t), \quad u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t), & t > 0, \\ u(x,0) = 9 - 2\cos 3x + \cos 6x, & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

Θέμα 5° (μον. 2)

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + 4y'(x) + (4 + 9\lambda)y(x) = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος *Fredholm*), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) + 4y'(x) + 14y(x) = e^{-2x}, \qquad 0 < x < 2, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

Θέμα 6° (μον. 1)

Με χρήση του συνημιτονικού μετασχηματισμού *Fourier*, να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος,

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(x,t) \to 0 \quad \text{ό}\tau\alpha\nu \quad x \to \infty, \\ u(x,0) = e^{-x}, \quad u_t(x,0) = 0, \end{cases}$$

έχει λύση την $u(x,t) = \begin{cases} e^{-t}\cosh x, & x < t \\ e^{-x}\cosh t, & x > t \end{cases}$.

Δίνονται:

1. $\mathcal{F}_C\{f(x)\} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(sx)\,dx = F(s), \quad s > 0,$
2. $\mathcal{F}_C\{f''(x)\} = -s^2 F(s) - \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, f'(0),$
3. $\mathcal{F}_C^{-1}\{F(s)\} = f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(s)\cos(sx)\,ds, \quad x > 0,$
4. $\mathcal{F}_C\{e^{-x}\} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{s^2+1}$ και $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ