ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Τομέας ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Σχολή ΕΦΑΡΜ ΜΑΘΗΜ & ΦΥΣ ΕΠ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ
157 80, ΑΘΗΝΑ.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
Department of MATHEMATICS
School of APPLIED MATH & PHYS SC
ZOGRAFOS CAMPUS, GR - 157 80
ATHENS, GREECE

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

6ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 06 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2004, ΩΡΑ 12.00

(1) Έστω ϕ, f δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[0,T]$ και $k = k(\tau) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύε

$$\phi(t) \leq f(t) + \int_0^t k(\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau.$$

Τότε έχουμε ότι,

$$\phi(t) \leq f(t) + \int_0^t k(\tau)\,f(\tau)\,\exp\left(\int_\tau^t k(s)\,ds\right)\,d\tau. \qquad \textbf{(Βαθμοί: 1.00)}$$

(2) Έστω το σύστημα $x' = F(x)$, όπου $F(0) = 0$ και $x = x(t)$, $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει μία συνάρτηση $V(x)$ θετικά ορισμένη και συνεχώς διαφορίσιμη σε μία γειτονιά του $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$. Τότε, (i) αν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη, η λύση $x(t) \equiv 0$, για κάθε $t \geq 0$, είναι ευσταθής, και (ii) αν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη, η λύση $x(t) \equiv 0$, για κάθε $t \geq 0$, είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

(Βαθμοί: 1.00)

(3) Να διερευνηθεί η ύπαρξη λύσεων σε κάποιο διάστημα γύρω από την αρχική τιμή για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$(i)\ y' = 2x^2y^2,\ y(1) = -1, \quad (ii)\ y' = y^{1/3},\ y(0) = 0.$$

Στη συνέχεια να εξετασθεί το μονοσήμαντο της λύσης, όταν αυτή υπάρχει. **(Βαθμοί: 1.00)**

(4) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας των κρίσιμων σημείων του ακόλουθου μη γραμμικού συστήματος:

$$x' = x^2 + 3xy - 4x, \quad y' = 2xy - 6y^2 + 4y,$$

με χρήση της θεωρίας γραμμικοποίησης. **(Βαθμοί: 1.50)**

(5) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης $x' = a + (\lambda - a)x + x^2$, όπου a είναι μια σταθερά. Να γίνει περιγραφή των τροχιακών δομών αυτής για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο διάγραμμα διακλάδωσης. Να διαπιστωθεί η διαφορά μεταξύ των περιπτώσεων $a > 0, a < 0$. **(Βαθμοί: 1.50)**

(6) (α) (i) Να αποδειχθεί ότι ο μ είναι χαρακτηριστικός πολλαπλασιαστής του συστήματος Floquet $x' = A(t)\,x$ αν και μόνο αν υπάρχει μη τετριμμένη λύση $x = x(t)$ τέτοια ώστε $x(t+T) = \mu\,x(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου T είναι η περίοδος του πίνακα $A(t)$. (ii) Να δοθεί μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το σύστημα $x' = A(t)\,x$ να έχει περιοδικές λύσεις. **(Βαθμοί: 1,00)**

(β) Να υπολογιστεί το γινόμενο των χαρακτηριστικών πολλαπλασιαστών του συστήματος Floquet

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & \sin^2 t \\ \cos^2 t & \sin t \end{pmatrix} x. \qquad \textbf{(Βαθμοί: 0.50)}$$

(7) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} t\,e^{-2t}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(Βαθμοί: 1.50)}$$

ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 9

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!