*ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ*
*Τομέας ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*
*Σχολή ΕΦΑΡΜ ΜΑΘΗΜ & ΦΥΣ ΕΠ*
*ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ*
*157 80, ΑΘΗΝΑ.*

*NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY*
*Department of MATHEMATICS*
*School of APPLIED MATH & PHYS SC*
*ZOGRAFOS CAMPUS, GR - 157 80*
*ATHENS, GREECE*

## ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## 6ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005, ΩΡΑ 08.30

(1) **(Θεώρημα Επέκτασης)** Έστω $D$ ανοικτό υποσύνολο του $\Re^{n+1}$, $f : D \subseteq \Re^{n+1} \to \Re^n$, συνεχής συνάρτηση και $x(t)$ μια λύση της $x'(t) = f(t, x)$. Αν $J = (a, b)$ είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης $x(t)$, τότε το $(t, x(t))$ τείνει στο $\partial D$, καθώς το $t \to a_+$ και το $t \to b_-$. **(Βαθμοί: 1.0)**

(2) Να διερευνηθεί η ύπαρξη λύσεων σε κάποιο διάστημα γύρω από την αρχική τιμή για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\text{(i) } y' = (x-y)^{1/4},\ y(6) = 6, \quad \text{(ii) } y' = (x-y)^{1/4},\ y(8) = 4.$$

Στη συνέχεια να εξετασθεί το μονοσήμαντο της λύσης, όταν αυτή υπάρχει. (Βαθμοί: 1.0)

(3) Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(Βαθμοί: 1.5)}$$

(4) (α) **(Θεώρημα Floquet)** Το σύστημα $x'(t) = A(t)\,x(t)$, όπου $A(t)$ είναι ένας $n \times n$ περιοδικός πίνακας με ελάχιστη $T$. έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη λύση $x = x(t)$ έτσι ώστε:

$$x(t+T) = \mu\, x(t),\ t \in \mathbb{R}, \quad \text{όπου } \mu \text{ είναι μία σταθερά.} \qquad \text{(Βαθμοί: 1.0)}$$

(β) Έστω το σύστημα:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta \sin t & 0 \end{pmatrix} x.$$

Έστω επίσης $\Phi(t) = \phi_{i,j}(t)$, $i, j = 1, 2$ ένας θεμελιώδης πίνακας του συστήματος τέτοιος ώστε $\Phi(0) = I$. Να δείξετε ότι οι χαρακτηριστικοί αριθμοί $\mu$ του συστήματος ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\mu^2 - \mu(\phi_{11}(2\pi) + \phi_{22}(2\pi)) + 1 = 0. \qquad \text{(Βαθμοί: 1.0)}$$

(5) (α) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας αυτών και να σχεδιασθεί το αντίστοιχο επίπεδο φάσεων

$$x' = 3x - 2y, \quad y' = 2x - 2y. \qquad \text{(Βαθμοί: 0.5)}$$

(β) Να γίνει ταξινόμηση των κρίσιμων σημείων του ακόλουθου συστήματος, με τη χρήση της θεωρίας γραμμικοποίησης:

$$x' = y - x^3, \quad y' = -x + y^3. \qquad \text{(Βαθμοί: 1.5)}$$

(6) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης $x' = \lambda^2 + 4a\lambda x + x^2$, όπου $a$ είναι μια σταθερά. Να γίνει περιγραφή των τροχιακών δομών αυτής για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου $\lambda$ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης. Επίσης να διαπιστωθεί η διαφορά μεταξύ των περιπτώσεων $|a| > 1$, $|a| < 1$, $|a| = 1$. (Βαθμοί: 1.5)

ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 9

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

*ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!*