ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Τομέας ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Σχολή ΕΦΑΡΜ ΜΑΘΗΜ & ΦΥΣ ΕΠ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ
157 80, ΑΘΗΝΑ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
Department of MATHEMATICS
School of APPLIED MATH & PHYS SC
ZOGRAFOS CAMPUS, GR - 157 80
ATHENS, GREECE

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

6ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 07 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003, ΩΡΑ 18.00

1) Να αποδειχθεί ότι αν $f(t,x)$ είναι μια συνάρτηση συνεχής και ορισμένη στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\phi($ ίναι λύση της εξίσωσης $x' = f(t,x)$ σ' ένα διάστημα $J \subseteq \mathbb{R}$, τότε η $\phi(t)$ μπορεί να επεκταθεί σ' έ ιέγιστο ανοικτό διάστημα ύπαρξης $J^* \supset J$. **(Βαθμοί: 1)**

2) Να αποδειχθεί ότι το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών δέχεται μοναδική λύση, η οποία ορίζετ ;' όλο το $\mathbb{R}$:

$$y' = (x^2+1)^{-1} e^{-y^2 \sin^2 x}, \; y(0) = 1. \qquad \textbf{(Βαθμοί: 1)}$$

3) Έστω το σύστημα $x' = F(x)$, όπου $F(0) = 0$ και $x = x(t)$, $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει μ ;υνάρτηση $V(x)$ συνεχώς διαφορίσιμη και ορισμένη σε μία γειτονιά S του $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, η οποία έχ ις ακόλουθες ιδιότητες: (i) $V(0) = 0$, (ii) η $\dot{V}(x)$ είναι θετικά ορισμένη, και (iii) σε κάθε γειτονιά τι ιρχής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x, για το οποίο $V(x) > 0$, τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$, $t \geq$ ίναι ασταθής. **(Βαθμοί: 1)**

4) (α) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας του κρίσιμου σημείου για το ακόλουθο γραμ ιικό σύστημα: $x' = -9x + 18y$, $y' = -3x + 6y$. Στη συνέχεια να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσεω ου συστήματος. **(Βαθμοί: 0.6)**

(β) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας των κρίσιμων σημείων του ακόλουθου μ ραμμικού συστήματος: $x' = \sin y$, $y' = -\sin x$, με χρήση της θεωρίας γραμμικοποίησης. **(Βαθμοί: 0.9)**

5) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης $x' = \lambda^2 + 2a\lambda x$ · ^{2}, όπου a είναι μια σταθερά. Να γίνει περιγραφή των τροχιακών δομών αυτής για τα διάφορ ;εδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο διάγραμμα διακλάδωσης. Να δια ιστωθεί η διαφορά μεταξύ των περιπτώσεων $|a| > 1$, $|a| < 1$, $|a| = 1$. **(Βαθμοί: 1.50)**

6) (α) Έστω το σύστημα $x' = A(t)\,x$, όπου $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ένας περιοδικός πίνακας με ελάχιστ ;ερίοδο T. Αν $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ είναι οι χαρακτηριστικοί αριθμοί του παραπάνω συστήματος, τότε να δειχθ ιτι:

$$\mu_1\,\mu_2 ... \mu_n = \exp\left(\int_0^T tr[A(s)]\,ds\right), \qquad \textbf{(Βαθμοί: 0.9)}$$

ιπου ένας επαναλαμβανόμενος χαρακτηριστικός αριθμός εμφανίζεται τόσες φορές όσες και η πολλαπλο ητά του.

(β) Έστω το σύστημα

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \cos t & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} + \sin t \end{pmatrix} x. \qquad \textbf{(Βαθμοί: 0.6)}$$

Να δειχθεί ότι το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση η οποία γίνεται μη φραγμένη καθώς $t \uparrow \infty$.

7) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(Βαθμοί: 1.50)}$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!