

ΕΜΠ-ΤΕΜΦΕ: ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

Φεβρουάριος 2002

Διάρκεια 2,30 ώρες

**Θέμα 1ον (Μονάδες 30)**

(i) Αν  $A, B, \Gamma$  είναι οι πίνακες αναπαράστασης των τελεστών  $\alpha, \beta$  και  $\gamma = \alpha\beta$  αντίστοιχα να δείξετε ότι  $\Gamma = AB$ .

(ii) Να δείξετε ότι οι διάκριτες τιμές της ενέργειας ενός μονοδιάστατου προβλήματος, που αντιστοιχούν κατά τα γνωστά σε κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις, είναι μη εκφυλισμένες.

**Θέμα 2ον (Μονάδες 25)**

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η κυματοσυνάρτηση  $\psi(x, 0)$  ενός σωματιδίου δίνεται από τις σχέσεις

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} C \sin \frac{2\pi x}{a} + 3C \sin \frac{4\pi x}{a} & \text{όταν } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{όταν } x < 0 \text{ και όταν } x > a \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την αβεβαιότητα  $\Delta p$  της ορμής του σωματιδίου σαν συνάρτηση του  $a$ . Από την  $\Delta p$  που θα βρείτε τι μπορείτε να συμπεράνετε για την αβεβαιότητα της θέσης του σωματιδίου;

**Θέμα 3ον (Μονάδες 25)**

(i) Αν  $r, \theta, \phi$  είναι σφαιρικές πολικές συντεταγμένες και  $P$  είναι ο τελεστής του κατοπτρισμού, να δείξετε ότι  $P\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r, \pi - \theta, \pi + \phi)$  και να υπολογίσετε την έκφραση  $P\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$ , όπου η  $\psi_{nlm}$  είναι κυματοσυνάρτηση του ατόμου του υδρογόνου.

(ii) Ένα άτομο του υδρογόνου βρίσκεται σε μια κατάσταση που έχει  $n = 2$  και είναι ιδιοκατάσταση του  $P$  με ιδιοτιμή  $-1$ . Αν μετρήσουμε το τετράγωνο της τροχιακής στροφορμής του ατόμου και τη  $z$  συνιστώσα της στροφορμής του, ποιές τιμές θα βρούμε;

**Θέμα 4ον (Μονάδες 20)**

Να υπολογίσετε την έκφραση

$$e^{i\alpha J_x} J_y e^{-i\alpha J_x}$$

όπου τα  $J_x$  και  $J_y$  είναι οι τελεστές της  $x$  και της  $y$  συνιστώσας της στροφορμής αντίστοιχα και το  $\alpha$  είναι μια σταθερά.

Υπόμνηση :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \psi(x) = E\psi(x), \quad (A)_{ij} = (\psi_i, A\psi_j), \quad (\Delta\alpha)(\Delta\beta) \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle |,$$

$$\int_0^a \sin m \frac{2\pi x}{a} \sin n \frac{2\pi x}{a} = \frac{a}{2} \delta_{mn}, \quad \int_0^a \sin m \frac{2\pi x}{a} \cos n \frac{2\pi x}{a} = 0, \quad m, n = 1, 2, 3 \dots$$

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_{\ell|m|} \frac{(-1)^{\ell}}{2^{\ell} \ell!} e^{im\phi} (\sin \theta)^{|m|} \left( \frac{d}{d \cos \theta} \right)^{\ell+|m|} \sin^{2\ell} \theta$$