



**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ**  
**«ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»**

17/2/2004    ΩΡΑ: 18:00

**Θέμα 1<sup>ο</sup> (βαθ. 2)**

α) Έστω  $y_1(x), y_2(x)$  δύο λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad x \in I, \quad (1)$$

όπου  $p(x), q(x)$  συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $I$ .

Αν  $W(x)$  είναι η ορίζουσα Wronski των  $y_1(x), y_2(x)$ , δείξτε ότι

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}, \quad x, x_0 \in I.$$

β) Έστω  $\phi(x)$  μία μη μηδενική λύση της εξίσωσης (1). Δείξτε ότι αν  $\phi(x_0) = 0$  για κάποιο  $x_0 \in I$ , τότε  $\phi'(x_0) \neq 0$ .

**Θέμα 2<sup>ο</sup> (βαθ. 2)**

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:  $y' = 1 + x y^2, \quad y(0) = 0, \quad -1 < x < 1, \quad -2 < y < 2$ .

α) Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Picard-Lindelof για την ύπαρξη λύσης σε κατάλληλο διάστημα.

β) Να βρεθούν με τη μέθοδο Picard οι όροι  $y_2, y_3, y_4$  της ακολουθίας διαδοχικών προσεγγίσεων της λύσης του προβλήματος (2).

**Θέμα 3<sup>ο</sup> (βαθ. 2.5)**

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:  $x^2 y'' + x y' - y = -\frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad y(1) = y'(1) = 0$ .

**Θέμα 4<sup>ο</sup> (βαθ. 2.5)**

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:  $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = g(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$ ,  
 όπου

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ t-1, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

**Θέμα 5<sup>ο</sup> (βαθ. 2)**

Να προσδιοριστούν οι τέσσερις πρώτοι μη μηδενικοί συντελεστές του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 του προβλήματος αρχικών τιμών:  $y''(x) + x^2 y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ .

**Δίνονται:**

1)  $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ , 2)  $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$ , 3)  $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$

4)  $\mathcal{L}\{\varphi(t-\alpha)H(t-\alpha)\} = e^{-s\alpha}\Phi(s)$ ,  $\alpha \geq 0$ , όπου  $\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \Phi(s)$  και

$$H_\alpha(t) = H(t-\alpha) = \begin{cases} 1, & t \geq \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases} \quad \text{η συνάρτηση Heaviside}$$

5)  $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$ ,  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ .