ΣΧΟΛΗ: ΕΜΦΕ
ΜΑΘΗΜΑ: Ανάλυση ΙΙΙ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1: Καμπύλες και Διανυσματικά Πεδία

1. Να γίνει γραφική παράσταση του ίχνους της $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (2t, t) & t \in [0,1] \\ (t+1, 5-4t) & t \in (1,3] \end{cases}$

2. Δίνεται η καμπύλη: $\mathbf{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu^3 t, \eta\mu^3 t), t \in [0, 2\pi]$. Να βρεθεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, καθώς και η εξίσωση της εφαπτομένης στα σημεία που αυτή ορίζεται.

3. Να βρεθεί η ταχύτητα των καμπύλων: $\mathbf{r}(t) = (4e^t, 6t^4, \sigma\upsilon\nu t)$, $\mathbf{q}(t) = (t\eta\mu t, 4t)$

4. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω παραμετρικές καμπύλες είναι ισοδύναμες. Ποιό είναι το κοινό τους ίχνος; Να βρεθεί μια φυσική παραμετρική παράσταση του ίχνους.

$$\mathbf{r}(t) = (2\sigma\upsilon\nu t, 2\eta\mu t), t \in [0, \pi], \quad \mathbf{q}(t) = (-2\sigma\upsilon\nu 2t, -2\eta\mu 2t), t \in [-\tfrac{\pi}{2}, 0]$$

5. Αν η $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in I$ είναι μια ομαλή καμπύλη,να δειχθεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $P(\mathbf{r}(t_0))$ είναι: $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{r}'(t_0)$. Υλικό σημείο ακολουθεί τη διαδρομή $\mathbf{r} = (\mathbf{e}^t, e^{-t}, \sigma\upsilon\nu t)$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 1$ οπότε φεύγει απο τη τροχιά του ακολουθώντας την εφαπτομένη.Σε ποιό σημείο του χώρου θα βρεθεί τη χρονική στιγμή $t = 3$;

6. Να βρεθούν παραμετρικές παραστάσεις για τις παρακάτω πεπλεγμένα ορισμένες καμπύλες.
   a. $|x| + |y| = 1$
   b. $x + y + z = 0, x - y + z = 1$
   c. $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$
   d. $z = 9 - (x^2 + y^2), x = y$

7. Στις παρακάτω περιπτώσεις να υπολογισθούν τα $\mathbf{r}'(t)$ και $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$
   a. $\mathbf{F}(x,y) = (xy, x-y)$, $\mathbf{r}(t) = (t, t^2), t \in [-2, 2]$
   b. $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$, $\mathbf{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t), t \in [0, \pi]$
   c. $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, z\sqrt{a^2 - y^2}, xy)$, $\mathbf{r}(t) = (a\sigma\upsilon\nu t, a\eta\mu t, bt), t \in [0, 2\pi]$
   d. $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$, $\mathbf{r}(t) = (a\sigma\upsilon\nu t, a\eta\mu t), t \in [0, \pi]$

8. Να δειχθεί ότι η $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{1-t}, 0, \frac{e^t}{1-t})$ είναι γραμμή ροής του $\mathbf{F}(x,y) = (x^2, 0, z(1+x))$.

9. Αν ένα υλικό σημείο **μάζας** m διαγράφει μια τροχιά $\mathbf{r}(t)$ με ταχύτητα $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ υπο την επίδραση διανυσματικού πεδίου δυνάμεων $\mathbf{F}(x,y,z)$, Η δύναμη $\mathbf{F}$ συνδέεται με την επιτάχυνση $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ με τον 2ο νόμο του Νέυτωνα: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{a}(t)$. Να αποδειχθεί ότι:
   a. Για την "***ορμή***", $\mathbf{J}(t) = m\mathbf{v}(t)$ και τη"*στροφορμή*":$\mathbf{G}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ισχύουν:
   $$\frac{d}{dt}[\mathbf{J}(t)] = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{G}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$
   b. Αν $\mathbf{F}(x,y,z) = -f(r)\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, η διανυσματική ακτίνα του σημείου$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ και $r = \|\mathbf{r}\|$το μέτρο της (κεντρικό πεδίο δυνάμεων) να δειχθεί ότι$\frac{d}{dt}[\mathbf{G}(t)] = 0$.
   c. Αν $\mathbf{F}(x,y,z) = -\nabla V$, όπου $V = V(x,y,z)$ διαφορίσιμη συνάρτηση (συνάρτηση δυναμικού) να αποδειχθεί ότι
      i. Η "***ολική ενέργεια***", $E(t) = \frac{1}{2}m\|\mathbf{r}'(t)\|^2 + V(\mathbf{r}(t))$ είναι σταθερή: $\frac{d}{dt}E(t) = 0$.
      ii. Αν η τροχιά του υλικού σημείου κείται σε μια ισοδυναμική επιφάνεια ($V(\mathbf{r}(t)) = c$) όπου c σταθερά, η ταχύτητά του $\upsilon(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ είναι σταθερή: $\frac{d}{dt}\upsilon(t) = 0$.
      iii. Αν $c(t)$ είναι μια γραμμή ροής του $\mathbf{F}$, να δεχθεί ότι η συνάρτηση $V(\mathbf{r}(t))$ είναι φθίνουσα.

10. Για τα διανυσματικά πεδία της άσκησης 5 να υπολογισθούν τα $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και $\nabla \times \mathbf{F}$ και να επαλληθευθεί ο τύπος $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Να δειχθεί ότι για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}(x,y,z) = (x,y,z)$ δέν υπάρχει διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ με $\mathbf{G} = \nabla\mathbf{F}$.

11. Αν $f : R^3 \longrightarrow R$ είναι μια C^2 συνάρτηση να δειχθεί ότι $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ και ότι για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, 0)$ δέν υπάρχει C^2 συνάρτηση $f : R^3 \longrightarrow R$ με $\mathbf{F} = \nabla f$.