



**1<sup>ο</sup> ΣΥΝΟΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ ΙΙΙ (ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ)**

**Κ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ**

**Α. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

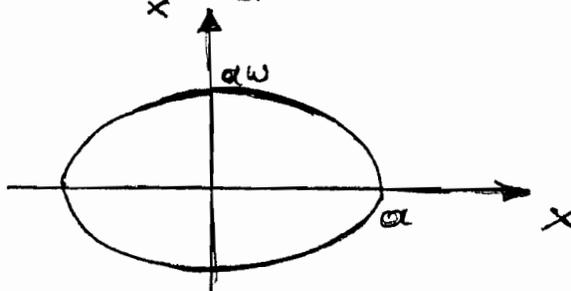
**Πρόβλημα 1.11**

Η μετατόπιση ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση  $x = a \sin \omega t$ . Αν οι τιμές της μετατόπισης  $x$  και της ταχύτητας  $\dot{x}$  καταγραφούν σε κάθετους άξονες, δείξτε απαλείφοντας το  $t$ , ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $(x, \dot{x})$  είναι έλλειψη. Δείξτε ότι αυτή η έλλειψη αντιστοιχεί σε σταθερή τιμή ενέργειας.

ΛΥΣΗ

$x = a \sin \omega t$  και  $v = \dot{x} = \omega a \cos \omega t$

$$\left. \begin{aligned} x^2 = a^2 \sin^2 \omega t &\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \sin^2 \omega t \\ \dot{x}^2 = a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t &\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{a^2 \omega^2} = \cos^2 \omega t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2 \omega^2} = 1$$



Για  $x=0, \dot{x}=a\omega$   
 $\dot{x}=0, x=a$

$E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$

Εμβαδόν έλλειψης :  $S = \pi a b = \pi a (a\omega) = \pi a^2 \omega$

και  $E = \frac{1}{2} \frac{m\omega}{\pi} (\pi \omega a^2) = \frac{m\omega}{2\pi} S$

και επειδή  $S, m, \omega$  σταθερά  $\rightarrow$  οι  $\dot{x}$  έλλειψη αυτή αντιστοιχεί σε σταθερή τιμή της ενέργειας

Πρόβλημα 1.9

Μια μάζα  $M$  είναι κρεμασμένη από ελατήριο μήκους  $l$  και σταθεράς  $s$ . Αν η μάζα του ελατηρίου είναι  $m$  και η ταχύτητα ενός στοιχείου του μήκους  $dy$  είναι ανάλογη της απόστασής του,  $y$ , από τα σταθερό άκρο του ελατηρίου, δείξτε ότι η κινητική ενέργεια του στοιχείου είναι

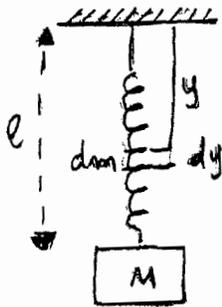
$$\frac{1}{2} \left( \frac{m}{l} dy \right) \left( \frac{y}{l} v \right)^2$$

όπου  $v$  είναι η ταχύτητα της μάζας  $M$ . Με αυτόν τον τρόπο, με ολοκλήρωση σε όλο το μήκος του ελατηρίου, δείξτε ότι η ολική κινητική ενέργειά του είναι  $(1/6)mv^2$

και, από την ολική ενέργεια του ταλαντώνομενου συστήματος, δείξτε ότι η συχνότητα ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$\omega^2 = \frac{s}{M + m/3}$$

Λύση



$$dm = \rho dy = \frac{m}{l} dy$$

ταχύτητα  $\dot{y} = \frac{y}{l} v$ , δίδεται

$$dT = \frac{1}{2} (dm) (\dot{y}^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{l} dy \right) \frac{y^2}{l^2} v^2$$

$$T = \int_0^l dT = \frac{1}{2} \frac{m}{l^3} v^2 \int_0^l y^2 dy = \frac{1}{2} \frac{m}{l^3} v^2 \frac{l^3}{3} = \frac{1}{6} mv^2$$

$$E = T_{\text{ολ}} + U = \frac{1}{6} mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} s \psi^2$$

$\psi$ : Η μεταβολή της απόστασης της μάζας  $M$  από την θέση ισορροπίας

$$\dot{\psi} = v$$

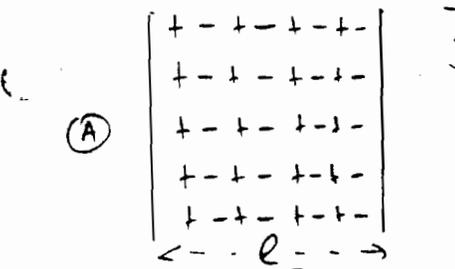
$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{6} m 2 \dot{\psi} \ddot{\psi} + \frac{1}{2} M 2 \dot{\psi} \ddot{\psi} + \frac{1}{2} s 2 \psi \dot{\psi} = 0$$

$$\dot{\psi} \left[ \left( \frac{m}{3} + M \right) \ddot{\psi} + s \psi \right] = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{s}{\frac{m}{3} + M}$$

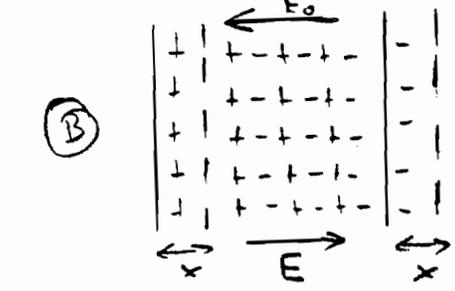
**Πρόβλημα 1.26**

Σε μια περιοχή υπάρχει πλάσμα ιονισμένου αερίου αποτελούμενο από ιόντα και ηλεκτρόνια σε ίσους αριθμούς ανά μονάδα όγκου ( $n_i = n_e = n$ ), με φορτία  $\pm e$  και μάζες  $m_i$  και  $m_e$  αντίστοιχα, όπου  $m_i > m_e$ . Η σχετική μετατόπιση των δύο ειδών φορτίου δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο επαναφοράς το οποίο τείνει να επαναφέρει τα ηλεκτρόνια στη θέση ισορροπίας τους, ενώ τα ιόντα μπορούν να θεωρηθούν ακίνητα. Στο σχήμα, σε ένα παραλληλεπίπεδο πάχους  $l$ , όλα τα ηλεκτρόνια μετατοπίζονται κατά απόσταση  $x$  δημιουργώντας έτσι ένα ηλεκτρικό πεδίο επαναφοράς  $E = nex / \epsilon_0$ , όπου  $\epsilon_0$  είναι σταθερά. Δείξτε ότι η δύναμη επαναφοράς ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται πάνω στα ηλεκτρόνια είναι  $nx^2 e^2 l / \epsilon_0$  και ότι αυτά εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα  $\omega_e$ , όπου  $\omega_e^2 = ne^2 / m_e \epsilon_0$ .

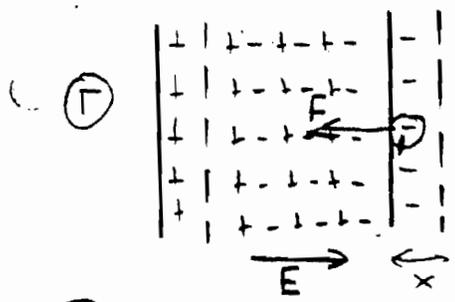
Η συχνότητα αυτή ονομάζεται συχνότητα πλάσματος ηλεκτρονίων και μόνο τα ραδιοκύματα εκείνα που έχουν συχνότητες  $\omega > \omega_e$  μπορούν να διαδοθούν μέσα σε ένα τέτοιο ιονισμένο μέσο. Σε αυτό οφείλεται και η ανάκλαση τέτοιων ραδιοκυμάτων από την ιονόσφαιρα.



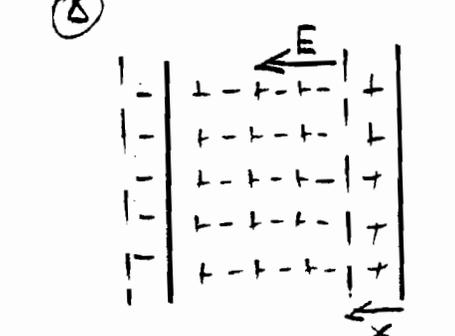
ΠΛΑΣΜΑ : Ιονισμένα τόρνια  $O_2, N_2$  λόγω άθροισμα γωφριώδου ακτινοβολίας - Ιονόσφαιρα (100-200 km) ΟΥΔΕΤΕΡΟ



$E_0 =$  εξωτερικό ωφδιο ωφ κνιγχι πι γηιαίο κίνηση των φορτίων, άπω κατά  $x$  και δημιουργία αντίθετου ηλεκτρισμού ωφδίου  $E$  τω σύστημα σε ισορροπία



- Σβίωση τω εξωτερικού ωφδίου  $E_0$   
- Θα έχουμε ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ



μετά χρόνο  $t = T/2$

1) τω  $E$  υπολογίζεται από τω νόμο τω Gauss

$$\text{div} E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \Rightarrow \int \text{div} E dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \quad \left( n = \frac{N}{V} \right)$$

$$\oint E dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q \Rightarrow E \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} n e V \rightarrow$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} n e \frac{V}{A} = \frac{1}{\epsilon_0} n e x \quad \boxed{E = \frac{1}{\epsilon_0} n e x}$$

ΤΡΑΙΚΑ  $F = m \gamma$

$$m a^2 x + \frac{n e x \cdot e}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_e^2 = \frac{n e^2}{m \epsilon_0}}$$

Το  $\omega_0$  εξαρτάται μόνο από το  $n$

τυπικές τιμές με  $n \approx 10^{22} - 10^{23}$  ηλεκτρόνια/ $m^3 \rightarrow \nu_p \approx 10 - 30$  kHz

- Η δύναμη ανακρούσε από τον δίαυλο εσωτερική με  $\omega_p$  το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\frac{F}{A} = \frac{eEN}{A} = \frac{e \cdot n e x N}{A \epsilon_0} = \frac{e^2 x n N}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{\epsilon_0} e^2 x n^2 x$$

β. τρόπος:

1. Στο τμήμα επιφάνειας  $A$  θα υπάρχει κάποια στιγμή θετικό φορτίο που θα αντιστοιχεί στον όγκο  $\Delta V = A \Delta x$ ,  $\Delta x = x$  η μετατόπιση των  $e^-$

$$\text{Άρα } Q = n e \Delta V = n e A x \quad (1)$$

2. Το φορτίο δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο

$$E = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \quad (2)$$

(-) το πεδίο τείνει να μειώσει το φορτίο

$$3. \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = e E$$

$$4. \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} = n e A \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{n e A}{m} \left( m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \frac{n e A}{m} e E = \frac{n e^2 A}{m} \left( -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \right)$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{n e^2}{m \epsilon_0} Q = 0, \text{ Άρα}$$

$$\boxed{Q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$
$$\omega_0^2 = \frac{n e^2}{m \epsilon_0}$$

**Πρόβλημα 3.1**

Δείξτε ότι η δυναμική ενέργεια δύο πανομοιότυπων απλών εκκρεμών που είναι συζευγμένα με ένα ελατήριο μπορεί να εκφραστεί ως  $aX^2 + bY^2$ , όπου  $X$  και  $Y$  είναι κανονικές συντεταγμένες και  $a$  και  $b$  είναι σταθερές. Δείξτε επίσης ότι η κινητική ενέργεια μπορεί να εκφραστεί ως  $c\dot{X}^2 + d\dot{Y}^2$ , όπου  $c$  και  $d$  είναι σταθερές. Υπολογίστε τα  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$  συναρτήσει των  $s$ ,  $l$ ,  $m$  και  $g$ .

**Πρόβλημα 3.2**

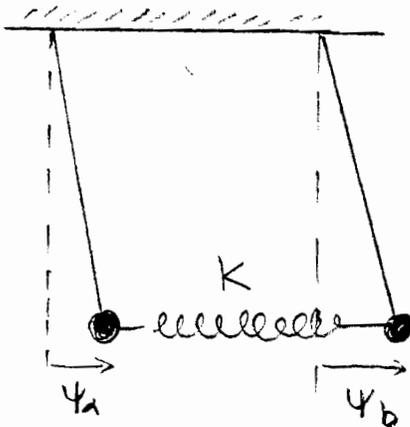
Εκφράστε την ολική ενέργεια του προβλήματος 3.1 συναρτήσει των μετατοπίσεων  $x$  και  $y$  των εκκρεμών ως

$$E = (E_{kin} + E_{pot})_x + (E_{kin} + E_{pot})_y + (E_{pot})_{xy}$$

όπου οι παρενθέσεις δίνουν την ενέργεια του κάθε εκκρεμούς εκφρασμένη στις δικές του συντεταγμένες και  $(E_{pot})_{xy}$  είναι η ενέργεια σύζευξης ή ανταλλαγής στην οποία υπεισέρχεται το γινόμενο αυτών των συντεταγμένων. (Σημ.  $E_{kin}$  είναι κινητική ενέργεια και  $E_{pot}$  είναι δυναμική ενέργεια).

ΛΥΣΗ

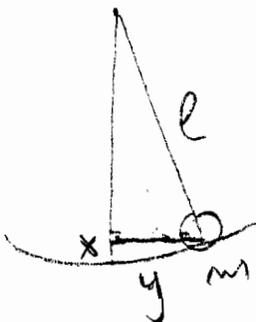
3.2



$$E = T + U$$

$$T = \frac{1}{2} m_a \dot{\psi}_a^2 + \frac{1}{2} m_b \dot{\psi}_b^2$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} \psi_a^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} \psi_b^2 + \frac{1}{2} k (\psi_b - \psi_a)^2$$



$$U = mgx = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\theta \ll 1, \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \text{ και } \theta = y/l$$

$$U = mgl \left( 1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = \frac{1}{2} mgl \frac{y^2}{l^2} = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} y^2$$

Άρα 
$$U = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} y^2$$

$$\text{1er } E = \left( \frac{1}{2} m \dot{\psi}_a^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} \psi_a^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m \dot{\psi}_b^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} \psi_b^2 \right) + \frac{1}{2} k (\psi_b - \psi_a)^2$$

$$\text{is } E = (T+U)_a + (T+U)_b + U_{ab}$$

$$\begin{aligned} 3.1 \quad \psi_a &= \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) & \dot{\psi}_a &= \frac{1}{2} (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) & \omega_1^2 &= g/l \\ \psi_b &= \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_2) & \dot{\psi}_b &= \frac{1}{2} (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) & \omega_2^2 &= g/l + \frac{2k}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a) \quad T &= \frac{1}{2} m \dot{\psi}_a^2 + \frac{1}{2} m \dot{\psi}_b^2 = \frac{1}{2} m \frac{1}{4} \left[ (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 + (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)^2 \right] = \\ &= \frac{m}{8} \left[ \dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2 + 2\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2 - 2\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2 \right] \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{4} m \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{4} m \dot{\psi}_2^2$$

$$\begin{aligned} b) \quad U &= \frac{1}{2} \frac{mg}{l} \psi_a^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} \psi_b^2 + \frac{1}{2} k (\psi_b - \psi_a)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{mg}{l} \frac{1}{4} \left[ (\psi_1 + \psi_2)^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2 \right] + \frac{1}{2} k \psi_2^2 = \\ &= \frac{1}{4} \frac{mg}{l} (\psi_1^2 + \psi_2^2) + \frac{1}{2} k \psi_2^2 = \frac{1}{4} m \left( \frac{g}{l} \right) \psi_1^2 + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} m \left( \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) \psi_2^2 = \left[ \frac{1}{4} m \omega_1^2 \psi_1^2 + \frac{1}{4} m \omega_2^2 \psi_2^2 = U \right]$$

(An optische bis k.M. was  $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_a + \psi_b)$  und  $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_a - \psi_b)$ )

$$E = T+U = \left( \frac{1}{2} m \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{\psi}_2^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m \omega_1^2 \psi_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 \psi_2^2 \right)$$

Πρόβλημα 3.5

(4)

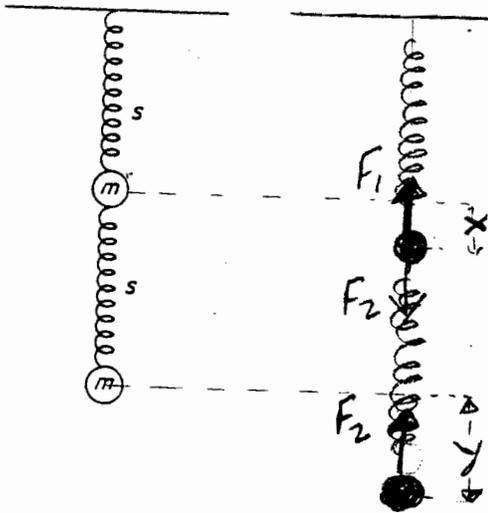
Οι δύο ίσες μάζες του σχήματος ταλαντώνονται κατακόρυφα. Δείξτε ότι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$\omega^2 = (3 \pm \sqrt{5}) \frac{s}{2m}$$

και ότι στον πιο αργό τρόπο ο λόγος του πλάτους της άνω μάζας προς το πλάτος της κάτω μάζας είναι  $(\sqrt{5}-1)/2$ , ενώ στον πιο γρήγορο τρόπο ο λόγος αυτός είναι  $(\sqrt{5}+1)/2$ .

Στους υπολογισμούς δε χρειάζεται να συμπεριλάβετε τις δυνάμεις βαρύτητας γιατί δε συγκαταλέγονται ανάμεσα στις δυνάμεις στις οποίες οφείλονται οι ταλαντώσεις.

ΛΥΣΗ



Εξισώσεις κίνησης

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -F_1 + F_2 = -s x + s(y-x) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -F_2 = -s(y-x) \end{aligned} \right\} \text{(I)}$$

Εστω ότι το σύστημα μας κινείται σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (κ.τ.τ.), δηλαδή

με κοινή συχνότητα και σε φάση, τότε

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{και} \quad y = B \cos(\omega t + \varphi)$$

Αντικαθιστώ στις Εξ. κίνησης (I).

$$\left. \begin{aligned} (-m\omega^2 A + 2sA - sB) \cos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ (-m\omega^2 B + sB - sA) \cos(\omega t + \varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \forall t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2s - m\omega^2)A - sB = 0 & \rightarrow A/B = s / (2s - m\omega^2) \\ -sA + (s - m\omega^2)B = 0 & \rightarrow A/B = (s - m\omega^2) / s \end{cases}$$

Για να έχει μη μηδενικές λύσεις το σύστημα πρέπει

$$\begin{vmatrix} (2s - m\omega^2) & -s \\ -s & (s - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2s - m\omega^2)(s - m\omega^2) - s^2 = 0$$

$$\text{Θέσω } \omega_0^2 = s/m \quad \text{και} \quad \text{έχω } (2\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4 = 0$$

$$2\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 - \omega_0^2\omega^2 + \omega^4 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

$$\text{using } \omega^2 = \frac{3\omega_0^2 \pm \sqrt{9\omega_0^4 - 4\omega_0^4}}{2} = \frac{3\omega_0^2 \pm \omega_0^2\sqrt{5}}{2} = \frac{\omega_0^2}{2}(3 \pm \sqrt{5})$$

$$\text{Αρα } \boxed{\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2}{2}(3 \pm \sqrt{5})} \quad \text{κανονικές συχνότητες}$$

$$\alpha) 1^{\text{ο}} \text{ κ.Τ.Τ. } \omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{2}(3 - \sqrt{5})$$

$$\frac{A}{B} = \frac{s - m\omega^2}{s} = \frac{m\omega_0^2 - m\omega^2}{m\omega_0^2} = 1 - \omega^2/\omega_0^2$$

$$\frac{A_1}{B_1} = 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{2 - 3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{και} \quad y_1 = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\beta) 2^{\text{ο}} \text{ κ.Τ.Τ. } \omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{2}(3 + \sqrt{5})$$

$$\frac{A_2}{B_2} = 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = \frac{2 - 3 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{(\sqrt{5} + 1)}{2}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \text{και} \quad y_2 = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\text{Γενική λύση: } x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Κανονικές συντεταγμένες: κανονικές μεταβλητές  
 επί συνήθως  $X$  και  $Y$  ως είναι ξεχωριστός  
 συνδυασμός των  $x$  και  $y$  και ταλαντώνονται  
 αρμονικά, δηλαδή μεταβάλλονται όπως το  $\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$   
 και  $\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$  αντίστοιχα

Απαιτείται να  $\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$  ή το  $\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  είναι  
 τις προηγούμενες σχέσεις  $A \times \omega$  :

$$B_2 x - A_2 y = (A_1 B_2 - B_2 A_1) \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$B_1 x - A_1 y = (A_2 B_1 - A_1 B_2) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\text{Εστω } \bar{X} \equiv A_1 \frac{B_2 x - A_2 y}{A_1 B_2 - B_2 A_1} = \frac{\frac{B_2}{A_2} x - y}{\frac{B_2}{A_2} - \frac{B_1}{A_1}} = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\text{και } \bar{Y} \equiv A_2 \frac{B_1 x - A_1 y}{A_2 B_1 - A_1 B_2} = \frac{\frac{B_1}{A_1} x - y}{\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2}} = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- Αντι των  $A_1$  και  $A_2$  ως ωστε των  $\bar{X}$  και  $\bar{Y}$   
 θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ομοιομορφότερα  
 δεδο. Στην ορίση των  $\bar{X}$  και  $\bar{Y}$  μόνο οι  
 λόγοι των συντελεστών των  $x$  και  $y$  είναι  
 καθορισμένοι, δηλαδή

$$\bar{X} \sim \frac{B_2}{A_2} x - y \quad \text{και} \quad \bar{Y} \sim \frac{B_1}{A_1} x - y$$

- Διαφορετικά! : Θα μπορούσαμε να ορίσουμε απλά  
 σαν κανονικές συντεταγμένες τις :

$$\bar{X} = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{και} \quad \bar{Y} = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

οπότε οι γενικές λύσεις γίνονται

$$x = \bar{X} + \bar{Y} \quad \text{και} \quad y = \left(\frac{B_1}{A_1}\right) \bar{X} + \left(\frac{B_2}{A_2}\right) \bar{Y}$$

και μέσω των σχέσεων αυτών να υπολογίσουμε  
 τις μεταβλητές  $\bar{X}$  και  $\bar{Y}$  αναζητώντας τις  $x$  και  $y$ .

**Πρόβλημα 3.6**

Για τα συζευγμένα εκκρεμή του Σχ. 3.3 ας συμβολίσουμε τη συχνότητα διαμόρφωσης με  $\omega_m = (\omega_2 - \omega_1)/2$  και τη μέση συχνότητα με  $\omega_a = (\omega_2 + \omega_1)/2$  και ας υποθέσουμε ότι το ελατήριο είναι τόσο μαλακό (μικρό  $s$ ) ώστε η ενέργεια που αποθηκεύεται σε αυτό να είναι αμελητέα. Υποθέστε ότι το διαμορφωμένο πλάτος

$$2a \cos \omega_m t \text{ ή } 2a \sin \omega_m t$$

είναι σταθερό στη διάρκεια ενός κύκλου με τη μέση γωνιακή συχνότητα  $\omega_a$  και δείξτε ότι οι ενέργειες των μαζών μπορούν να εκφραστούν ως

$$E_x = 2ma^2\omega_a^2 \cos^2 \omega_m t$$

και

$$E_y = 2ma^2\omega_a^2 \sin^2 \omega_m t$$

Δείξτε ότι η ολική ενέργεια  $E$  παραμένει σταθερή και ότι η διαφορά των ενεργειών είναι

$$E_x - E_y = E \cos(\omega_2 - \omega_1)t$$

Αποδείξτε ότι

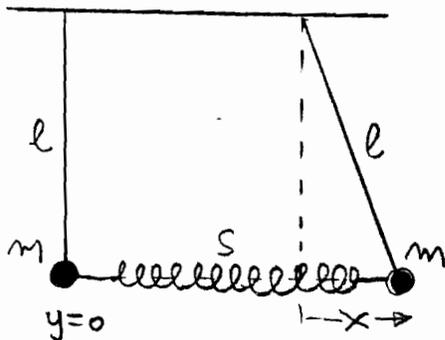
$$E_x = \frac{E}{2}[1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

και

$$E_y = \frac{E}{2}[1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

για να δείξετε ότι η σταθερή ολική ενέργεια ανταλλάσσεται τελείως ανάμεσα στα δύο εκκρεμή στη συχνότητα των διακροτημάτων  $(\omega_2 - \omega_1)$ .

ΛΥΣΗ



Αρχικές συνθήκες

$$t=0 \quad x=2a, \quad y=0 \quad \text{και} \quad \dot{x}=\dot{y}=0$$

Οι λύσεις είναι της μορφής

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t \\ y &= a \cos \omega_1 t - a \cos \omega_2 t \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\text{οπου} \quad \omega_1 = \sqrt{g/l} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \sqrt{g/l + 2s/m} \quad (2)$$

Οι λύσεις (1) γράφονται :

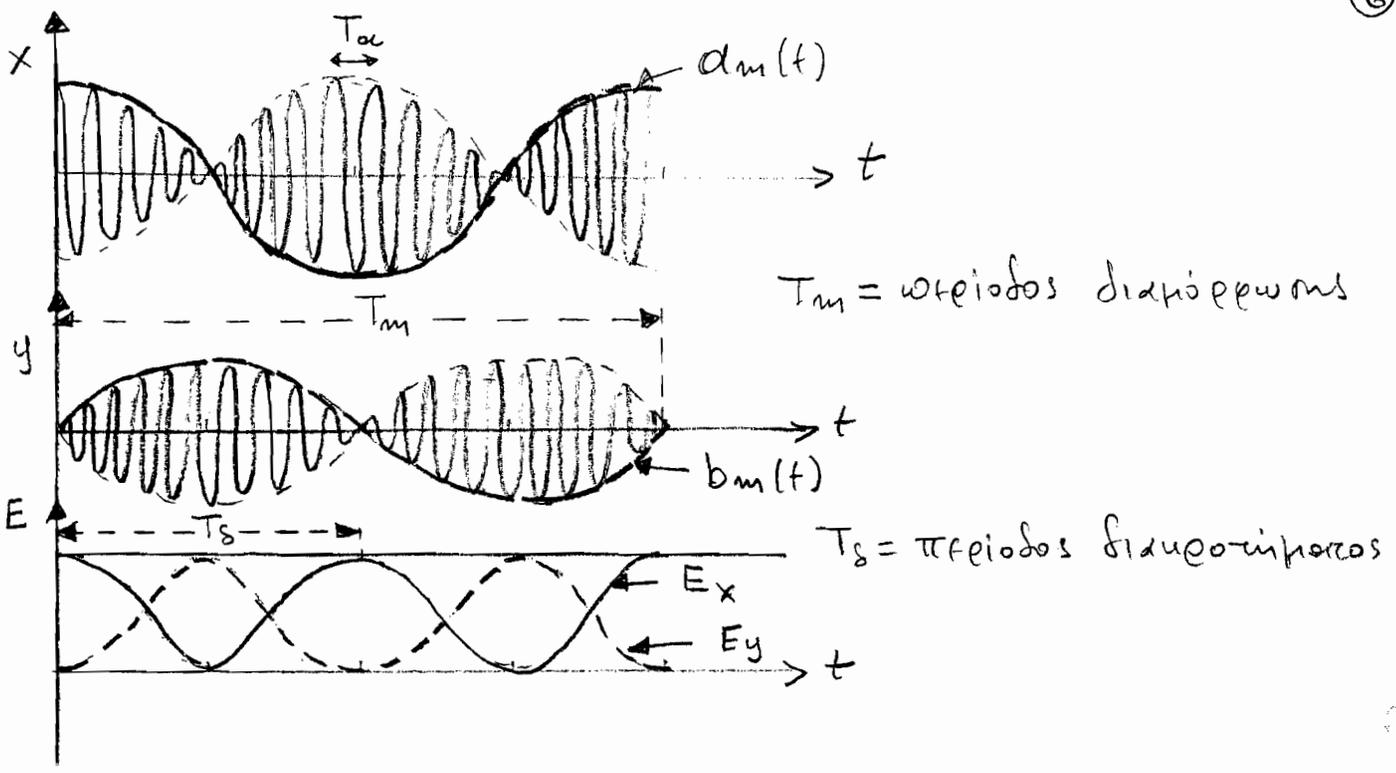
$$\left. \begin{aligned} x &= 2a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) = a_m(t) \cos \omega_a t \\ y &= 2a \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) = b_m(t) \sin \omega_a t \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\text{οπου} \quad a_m(t) = 2a \cos \omega_m t, \quad b_m(t) = 2a \sin \omega_m t \quad (4)$$

$$\text{και} \quad \omega_m = (\omega_1 - \omega_2)/2 \quad \text{και} \quad \omega_a = (\omega_1 + \omega_2)/2 \quad (5)$$

$$- \quad \omega_2 = \sqrt{g/l} \sqrt{1 + \frac{2s \ell}{m g}} = \omega_1 \sqrt{1 + 2E} \quad \text{οπου} \quad E = \frac{s \ell}{m g}$$

(π.χ  $\ell = 0.5 \text{ m}$ ,  $m = 0.2 \text{ kg}$ ,  $s = 0.1 \text{ N/m}$  και  $g = 10 \text{ m/s}^2$   
 $E = (0.1 \times 0.5) / (0.2 \times 10) = 0.025$ )



$T_m = \text{ωφειοδος διαμορφωσης}$

$T_s = \text{περιοδος διακυνοσηματος}$

για  $\epsilon \ll 1$ , επιλεξι για  $s$  μικρο και  $m$  μεγαλο

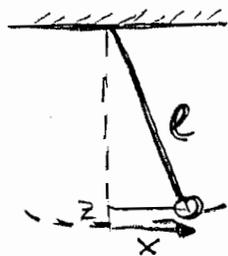
$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}} \approx \omega_1 \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) = \omega_1 (1 + \epsilon)$$

Τελικα εχουμε οτι :

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_a, \quad \omega_m \approx \omega_1 \epsilon / 2 \quad \text{και} \quad \omega_m \ll \omega_a \text{ η } T_m \gg T_s$$

- Στην ωφειωση αυτη μιλαμε για διαφοσημα η ε' υφιο χαρακτηριστη οω ωφιος  $a_m(t)$  και  $b_m(t)$  μεταβαλλεται "γιγο" κατα την διαφεια μεριων εωο ης ονομαζομενες "ρηγορες" ταλανωσις ωο οφειλονται στον ορο του  $\cos \omega_a t$  και εποφως εχουμε μια "εφεδωω αρμωικη" ταλανωση με μεταβλητο ωφιος (βλεπε και σχημα)

-  $E = E_x + E_y + E_{εγ}$   
 $E_x = U_x + K_x$   
 $E_y = U_y + K_y$   
 $E_{εγ} = \frac{1}{2} s(x-y)^2$



$(x \ll l)$

$$U_x = mgz = mg(l - \sqrt{l^2 - x^2}) = mgl(1 - \sqrt{1 - (\frac{x}{l})^2}) \approx$$

$$\approx mgl(1 - (1 - \frac{x^2}{2l^2})) = \frac{1}{2} m \frac{g}{l} x^2 = \frac{1}{2} m \omega_1^2 x^2 \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} m \omega_a^2 x^2$$

Επομένως  $U_x = \frac{1}{2} m \omega_a^2 a_m^2 \cos^2 \omega_m t$  (6)

$$k_x = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \text{ ἄρα } \dot{x} = (a_m(t) \cos \omega_a t)' =$$

$$= \dot{a}_m(t) \cos \omega_a t - a_m(t) \omega_a \sin \omega_a t = -a_m \omega_a \sin \omega_a t$$

Διότι  $\dot{a}_m \approx 0$  κατά την διάρκεια των πηχόφωνων κινήσεων. Τελικά:

$$k_x = \frac{1}{2} m \omega_a^2 a_m^2 \sin^2 \omega_a t$$
 (7)

$$E_x = U_x + k_x = \frac{1}{2} m \omega_a^2 a_m^2(t) = 2m a^2 \omega_a^2 \cos^2 \omega_m t$$
 (8)
$$E_y = U_y + k_y = \frac{1}{2} m \omega_a^2 b_m^2(t) = 2m a^2 \omega_a^2 \sin^2 \omega_m t$$

$$E_{FA} = \frac{1}{2} S(x-y)^2 = \frac{1}{2} S(2a \cos \omega_a t)^2 = 2S a^2 \cos^2 \omega_a t$$

$$\frac{E_{FA}^{max}}{E_x^{max}} \approx \frac{2S a^2}{2m a^2 \omega_a^2} = \frac{S}{m \omega_a^2} = \frac{S}{m \omega_1^2} = \frac{S l}{m g} = \epsilon \ll 1$$

Επομένως  $E_y \ll E_x$  ή  $E_y$

Οπότε ενέργεια  $E = E_x + E_y = 2m a^2 \omega_a^2 = \sigma T_2 \theta_{φφ}$

Από Eq. 8  $\rightarrow E_x = 2m a^2 \omega_a^2 \left( \frac{1 + \cos 2\omega_m t}{2} \right) =$

$$= \frac{E}{2} (1 + \cos 2\omega_m t)$$

$$E_y = 2m a^2 \omega_a^2 \left( \frac{1 - \cos 2\omega_m t}{2} \right) = \frac{E}{2} (1 - \cos 2\omega_m t)$$

$$E_x = \frac{E}{2} (1 + \cos 2\omega_m t) = \frac{E}{2} [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

$$E_y = \frac{E}{2} (1 - \cos 2\omega_m t) = \frac{E}{2} [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

και  $E_x - E_y = E \cos 2\omega_m t = E \cos(\omega_2 - \omega_1)t$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1)  $(E_x)^{max} = E$  όταν  $E_y = (E_y)^{min} = 0$
- $(E_y)^{max} = E$  όταν  $E_x = (E_x)^{min} = 0$

Ανάλυση υπάρχει ωρίως ανταλλαγή εντάσεων μεταξύ των ηλεκτρονίων, αυτό οφείλεται με συχνότητα  $2\omega_m = \omega_2 - \omega_1$ , με είν συχνότητα διαμορφώσεως που είναι διλάσια της συχνότητας διαμόρφωσης.

2) ορίοι : Συχνότητα διαμόρφωσης, περίοδος διαμόρφωσης

$$\omega_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}$$

Συχνότητα διαμορφώσεως, περίοδος διαμορφώσεως

$$\omega_g = \omega_2 - \omega_1 \quad T_g = \frac{2\pi}{\omega_g}$$

$$\omega_g = 2\omega_m \quad T_g = T_m / 2$$

Πρόβλημα 3.7

Όταν οι μάζες των συζευγμένων εκκρεμών του Σχ. 3.1 δεν είναι ίσες, οι εξισώσεις της κίνησης είναι

$$m_1 \ddot{x} = -m_1(g/l)x - s(x-y)$$

και

$$m_2 \ddot{y} = -m_2(g/l)y + s(x-y)$$

Δείξτε ότι είναι δυνατόν να επιλέξουμε ως κανονικές συντεταγμένες την

$$X = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}$$

με κανονική συχνότητα που δίνεται από τη σχέση  $\omega_1^2 = g/l$  και την  $Y = x - y$  με κανονική συχνότητα που δίνεται από τη σχέση  $\omega_2^2 = g/l + s(1/m_1 + 1/m_2)$ .

Σημειώστε ότι η  $X$  είναι η συντεταγμένη του κέντρου μάζας του συστήματος, ενώ η ενεργός μάζα για τον τρόπο  $Y$  είναι η ανηγμένη μάζα  $\mu$  του συστήματος, όπου  $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$ .

ΛΥΣΗ

α) Προσθέσω τις δύο εξισώσεις

$$m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{y} = -g/e (m_1 x + m_2 y)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 x + m_2 y) + g/e (m_1 x + m_2 y) = 0$$

και  $\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2} \right) + g/e \left( \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2} \right) = 0$

$$X \equiv \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad \frac{d^2 X}{dt^2} + g/e X = 0 \quad \text{και} \quad \omega_1^2 = g/e$$

β) Αφαιρώ τις δύο εξισώσεις αφού πρώτα διαιρέσω με  $m_1$  και  $m_2$  αντίστοιχα.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -g/e x - s/m_1 (x-y) \\ \ddot{y} &= -g/e y + s/m_2 (x-y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{x} - \ddot{y} = -g/e (x-y) - s \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x-y)$$

Θέσω  $Y = x - y$ ,  $\frac{d^2 Y}{dt^2} + \left[ g/e + s \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right] Y = 0$

και  $\omega_2^2 = g/e + s \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = g/e + s/\mu$

$$X = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2} \rightarrow \text{στις κέντρο μάζας}$$

$Y = x - y \rightarrow$  σχετική αιώσταση των δύο εκκρεμών  
και  $\mu = (m_1 \cdot m_2) / (m_1 + m_2)$  ανηγμένη μάζα

Πρόβλημα 3.9

Χρησιμοποιήστε τις συνθήκες ασθενούς σύζευξης του προβλήματος 3.6 στο σύστημα του προβλήματος 3.8 για να δείξετε ότι οι ενέργειες είναι

$$E_x = \frac{E}{M^2} [m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

και

$$E_y = E \left( \frac{2m_1 m_2}{M^2} \right) [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

Σημειώστε ότι η  $E_x$  μεταβάλλεται μεταξύ μιας μέγιστης τιμής  $E$  (για  $t=0$ ) και μιας ελάχιστης τιμής  $[(m_1 - m_2)/M]^2 E$ , ενώ η  $E_y$  ταλαντώνεται μεταξύ της ελάχιστης της τιμής ίσης με μηδέν για  $t=0$  και της μέγιστης τιμής  $4(m_1 m_2 / M^2) E$  με συχνότητα ίση με αυτήν των διακροτημάτων,  $(\omega_2 - \omega_1)$ .

ΛΥΣΗ

Από πρόβλημα 3.8 έχουμε ότι:

$$x = A \cos \omega_m t \cos \omega_a t + \frac{A}{M} (m_1 - m_2) \sin \omega_m t \sin \omega_a t$$

$$y = 2 \frac{A m_1}{M} \sin \omega_m t \sin \omega_a t$$

Θέτω  $C_1 = A \cos \omega_m t$  και  $C_2 = \frac{A}{M} (m_1 - m_2) \sin \omega_m t$

$$x = C_1 \cos \omega_a t + C_2 \sin \omega_a t = C \cos(\omega_a t + \phi)$$

όπου  $C^2 = C_1^2 + C_2^2$  και  $\tan \phi = C_2 / C_1$

- θεωρώντας το πλάτος  $C$  σταθερό κατά την διάρκεια των "γρήγορων" ταλαντώσεων ως αντιστοιχούν στον όρο  $\cos \omega_a t$ , η ενέργεια δίνεται:

$$E_x = \frac{1}{2} m_1 \omega_a^2 C^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega_a^2 [C_1^2 + C_2^2] =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \omega_a^2 A^2 \left[ \cos^2 \omega_m t + \left( \frac{m_1 - m_2}{M} \right)^2 \sin^2 \omega_m t \right]$$

και  $y = D \sin \omega_a t$   $D = \frac{2A m_1}{M} \sin \omega_m t$

$$E_y = \frac{1}{2} m_2 \omega_a^2 D^2 = \frac{1}{2} m_2 \omega_a^2 \frac{4 A^2 m_1^2}{M^2} \sin^2 \omega_m t =$$

$$= 2 \frac{m_2 m_1^2}{M^2} \omega_a^2 A^2 \sin^2 \omega_m t$$

$$\text{Αρα } \begin{cases} E_x = \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 A^2 \left[ \cos^2 \omega_1 t + \left( \frac{m_1 - m_2}{M} \right)^2 \sin^2 \omega_1 t \right] \\ E_y = \frac{2 m_1 m_2 \omega_1^2}{M^2} A^2 \sin^2 \omega_1 t \end{cases}$$

$F_x, F_y = E = \sigma_{\tau} \partial F \dot{x}$ , για  $t=0$   $E_y = 0$  και  $E_x = E$

$$\text{Αρα } \boxed{E = E_x(t=0) = \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 A^2}$$

$$E_y = \frac{4 m_1 m_2}{M^2} E \left( \frac{1 - \cos 2 \omega_1 t}{2} \right) = \frac{2 m_1 m_2}{M^2} E (1 - \cos 2 \omega_1 t)$$

$$\text{Αρα } \boxed{E_y = \frac{2 m_1 m_2}{M^2} E (1 - \cos 2 \omega_1 t) = \frac{2 m_1 m_2}{M^2} E [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t]}$$

$$F_x = E - F_y = E - E \frac{2 m_1 m_2}{M^2} [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t] =$$

$$= \frac{E}{M^2} [M^2 - 2 m_1 m_2 + 2 m_1 m_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

$$\text{Αρα } \boxed{E_x = \frac{E}{M^2} [m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t]}$$

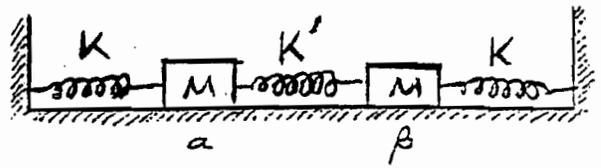
$$\left( \frac{m_1 - m_2}{M} \right)^2 E \leq E_x \leq E \quad \text{και} \quad 0 \leq E_y \leq \frac{4 m_1 m_2}{M^2} E$$

Οι  $E_x$  και  $E_y$  μεταβάλλονται με τη ρυθμότητα του διακροσμού  $\omega_s = \omega_2 - \omega_1$

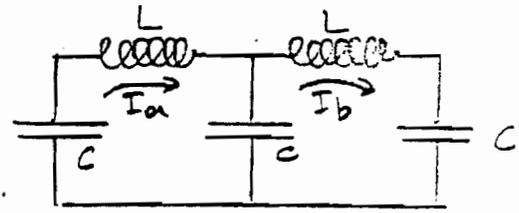
**B. ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ** (Να παραδίδονται 2-3 ασκήσεις ανά εβδομάδα)

1) Εκφράστε το πλάτος  $A$  και τη φάση  $\phi$  μιας αρμονικής ταλάντωσης  $\psi(t)=A\cos(\omega t+\phi)$  συναρτήσει του πλάτους  $\psi(0)$  και της ταχύτητας  $\dot{\psi}(0)$  για  $t=0$ .

2) Να βρεθούν: α) οι κυκλικές συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος που φαίνεται στο Σχήμα. β) οι εκφράσεις που δίνουν τις απομακρύνσεις των δύο μαζών από τη θέση ισορροπίας τους συναρτήσει των απομακρύνσεων  $\psi_a(0)$  και  $\psi_b(0)$  και των αρχικών ταχυτήτων  $\dot{\psi}_a(0)$  και  $\dot{\psi}_b(0)$ .

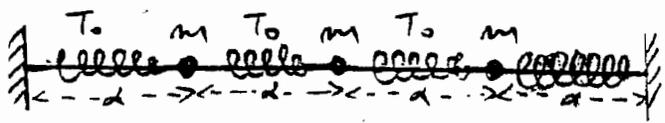


3) Δίδεται το κύκλωμα των δύο συζευγμένων κυκλωμάτων LC, όπου  $L=10H$  και  $C=6\mu F$ . Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  (βλέπε και προβλ. 3.12 του PAIN).



4) Θεωρούμε τις διαμήκειες ταλαντώσεις ενός διατομικού μορίου π.χ.  $HCl$  κατά μήκος του άξονα που περνάει από τα κέντρα μάζας των ατόμων του μορίου. Υποθέτουμε ότι ο χημικός δεσμός που συγκρατεί τα μόρια περιγράφεται από ένα κλασικό αβαρές ελατήριο σταθεράς  $K$ . Να βρεθούν οι κανονικοί τρόποι και οι ιδιοσυχνότητες του μορίου (βλέπε και προβ. 3.4 του PAIN).

5) Βρείτε τους σχηματισμούς και τις συχνότητες των εγκαρσίων ταλαντώσεων ενός συστήματος που αποτελείται από τρία ισαπέχοντα σφαιρίδια. α) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ορίζουσας. β) Η γενική λύση για  $N$  σφαιρίδια για τους σχηματισμούς και τις συχνότητες δίδονται από τις εξισώσεις:



$\psi_n = \cos(\omega t + \phi)(A \sin nka + B \cos nka)$   
και  $\omega = 2\omega_0 \sin ka/2$  με  $\omega_0 = (T_0/ma)^{1/2}$   
Εφαρμόστε τις σχέσεις αυτές για  $n=3$  και δείξτε ότι τα αποτελέσματά σας συμφωνούν με αυτά της μεθόδου α). (Οι οριακές συνθήκες είναι  $\psi(0)=\psi(4a)=0 \forall t$ ).