



### 3<sup>ο</sup> ΣΥΝΟΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ III (ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ)

K. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

#### A. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ένα κύμα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\psi(z,t) = e^{-az^2 - bt^2 - 2\sqrt{ab}zt}$$

1. Προς ποια διεύθυνση διαδίδεται το κύμα
2. Ποια η ταχύτητα του κύματος
3. Να σχεδιαστεί το κύμα για τη χρονική στιγμή t=0  
Δίδεται ότι a=144 cm<sup>-2</sup>, b=9 sec<sup>-2</sup>

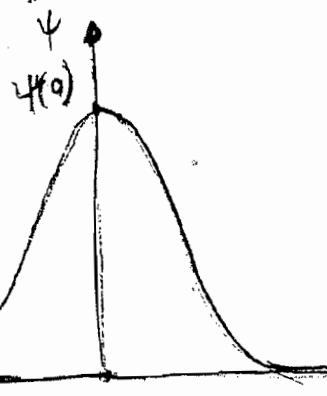
#### ΛΥΣΗ

To  $\Psi$  γράφεται ως εξής

$$\Psi = e^{-a(z + \sqrt{\frac{b}{a}}t)^2} = e^{-a(z + vt)^2}$$

- a) Το κύμα διαδίδεται ωρός την  $-z$  διεύθυνση
- b) Η ταχύτητα του είναι  $v = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{9}{144}} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 0.25 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
- c)  $\Psi(z,t) = e^{-144(z + 0.25t)^2}$

$$\text{για } t=0 \quad \Psi(z) = e^{-144 z^2}$$



Πρόβλημα 4.3

Δείξτε ότι για ένα κύμα που οδεύει προς τα αριστερά ισχύει

$$\frac{\partial y}{\partial t} = +c \frac{\partial y}{\partial x}$$

σχεδιάζοντας ένα διάγραμμα που δείχνει τις σωματιδιακές ταχύτητες όπως στο Σχ. 4.5 (σημειώστε ότι το  $c$  είναι μέγεθος και δεν αλλάζει πρόσημο).

ΛΥΣΗ

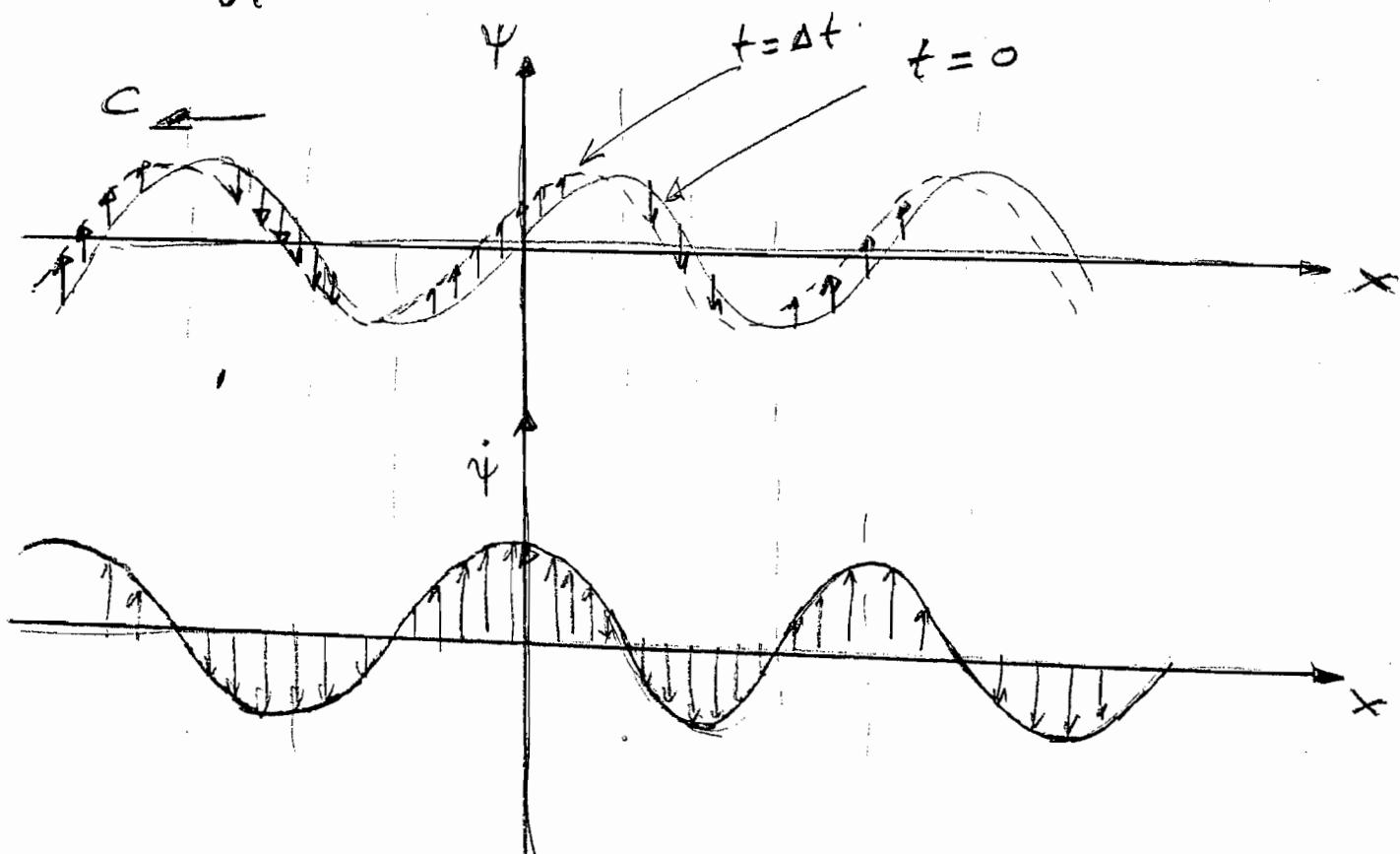
$$\psi = f(ct+x) \quad u = ct+x$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} = c \frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

Για αρμονικό οδυνό κύμα  $\psi = \alpha \sin(\omega t + kx)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha k \cos(\omega t + kx)$$

$$\text{Αρχ } \frac{\partial \psi}{\partial t} = c k \alpha \cos(\omega t + kx)$$



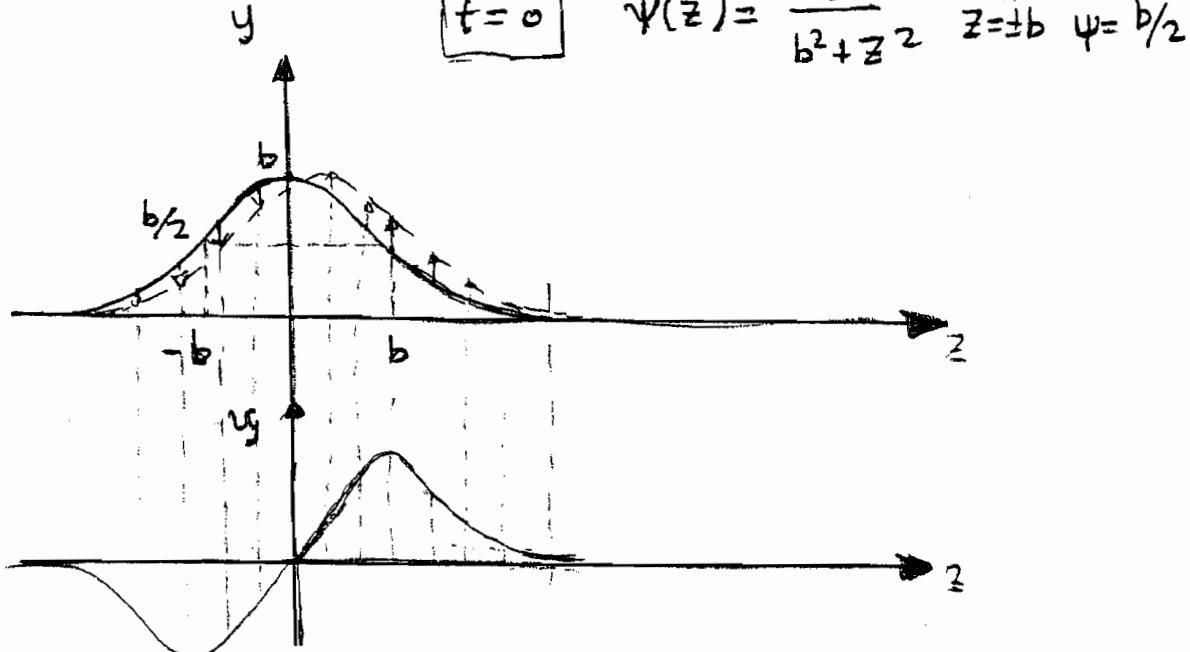
Δίδεται παλμός που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\psi(z, t) = \frac{b^3}{b^2 + (z - vt)^2}$$

Σχεδιάστε πρόχειρα τη μορφή του παλμού για  $t=0$ . Υπολογίστε την σωματιδιακή ταχύτητα και δείξτε ποιοτικά πως συνδέεται με την μεταβολή του παλμού.

ΛΥΣΗ

d)



θ)  $v_y = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-2(z-vt)(-v)}{[b^2 + (z-vt)^2]^2} = \frac{2v(z-vt)b^3}{[b^2 + (z-vt)^2]^2}$

$t=0$   $\boxed{v_y = \frac{2vb^3}{(b^2 + z^2)^2}}$

γ) Είναι ευνούμενό να δούμε τιώς αυτές οι ταχύτητες, ενεργώντας για κάθε χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , δίνουν τικές μεταστοιχίεις  $\Delta y = v_y \Delta t$ , οι οποίες μετατρέπονται στο ωριμό σήμα ενα δύναμα φαίνεται στο σύμμα

Πρόβλημα 4.2

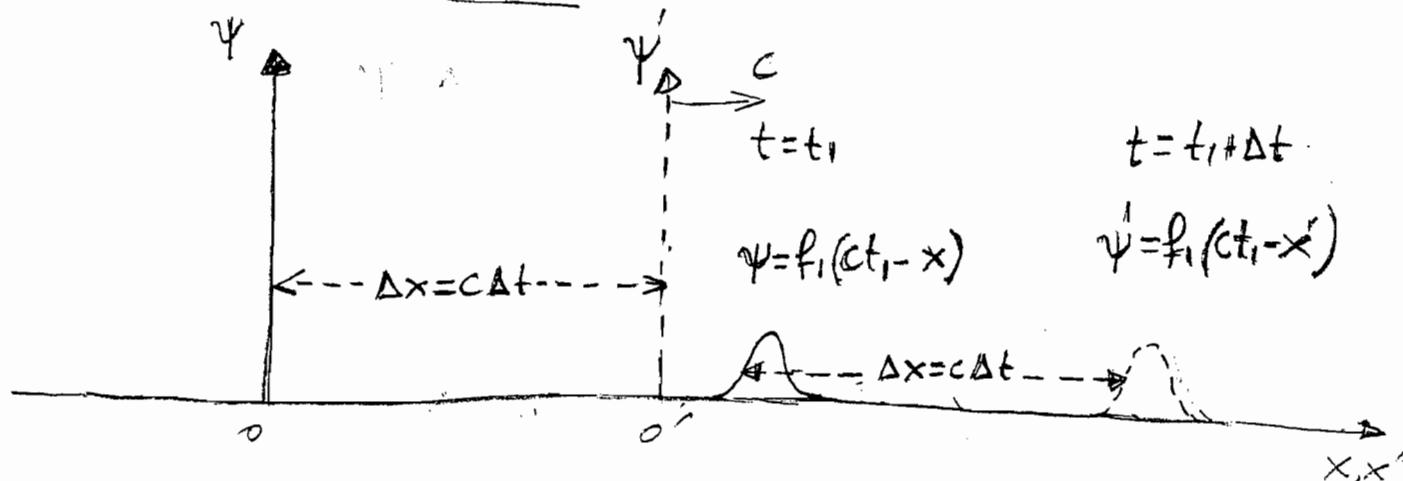
Δείξτε ότι η κυματική μορφή, δηλαδή η

$$y = f_1(ct - x)$$

δε μεταβάλλεται με το χρόνο όταν  $c$  είναι η κυματική ταχύτητα. Για το σκοπό αυτό θεωρήστε την έκφραση για το  $y$  τη στιγμή  $t + \Delta t$ , όπου  $\Delta t = \Delta x/c$ .

Επαναλάβατε το πρόβλημα για  $y = f_2(ct + x)$ .

ΛΥΣΗ



a) Για  $t = t_1$ ,  $\Psi = f_1(ct_1 - x)$ ,  $c$  σταθεροί

$$\text{Για } t = t_1 + \Delta t \text{ ουσώς } \Delta t = \Delta x/c \quad \Psi = f_1(ct_1 + c\Delta t - x) = \\ = f_1(ct_1 + \Delta x - x)$$

μάλω τό ΜΕΤΑΞΥΝΘΑΙΡΙΣΜΟ  $x = x' + \Delta x \Rightarrow \Delta x - x = x'$

$$\text{Άρα } \Psi = f_1(ct_1 - x') = \Psi'$$

Άρα η δυνάρτηση της χρονικής στιγμής  $t_1 + \Delta t$  είναι ότι

μέ τη δυνάρτηση της χρονικής στιγμής  $t_1$  οί ΔΔΔ δεν εντοπίζονται ως έχει ΜΕΤΑΖΩΩΜΕΘΕΙ ωρός τη δεξιά κατά  $\Delta x$ . Επειδή  $\Delta x = c\Delta t$  επεργάζεται ο ωρός οι οποίοι πινείται ωρός τη δεξιά χωρίς να αλλάξει σχήμα μίας ταχύτητας  $c$

b) Για  $t = t_1$   $\Psi = f_1(ct_1 + x)$

$$\text{Για } t = t_1 + \Delta t \quad \Psi = f_1(ct_1 + c\Delta t + x) = f_1(ct_1 + \Delta x + x)$$

κάνω τον ΜΕΤΑΞΥΝΘΑΙΡΙΣΜΟ  $x = x' - \Delta x \Rightarrow \Delta x + x = x'$

$$\text{Άρα } \Psi = f_1(ct_1 + x') = \Psi'$$

Τα ίδια μήτρες ως στην προηγούμενη (α) αλλά το  
εύσημα αναλογός θέτει μεταπομεθόπιστας  
Τα αριθτέρα ματά ΔX, και ο ωκεανός  
μπορεί να αναλογώς θέτει τα αριθτέρα  
μήτρας ταχύτητας C.

29. Δείξτε δτι η εξίσωση Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 \Psi(z,t)}{\partial t^2} + \omega_0^2 \Psi(z,t) = v_0^2 \frac{\partial^2 \Psi(z,t)}{\partial z^2}$$

όπου  $\omega_0$ , να σταθερέα, επιδέχεται σαν λύσεις

a)  $\Psi(z,t) = A \cos(\omega t - kz + \phi)$  αν  $\omega^2 = \omega_0^2 + v_0^2 k^2 > \omega_0^2$

αρμονικό οδεύον κύμα

b)  $\Psi(z,t) = e^{-kz} \cos(\omega t + \phi)$ , αν  $\omega^2 = \omega_0^2 - v_0^2 k^2 < \omega_0^2$

εκθετικό κύμα

a) Γενική λύση της ορθογονούς μήτρας της  $\Psi(z,t) = A e^{i(\omega t - kz)}$  ( $A = A_0$ )  
 $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\omega \Psi$  και  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -k^2 \Psi$ , συναρθίστικη στην έργη σωμάτων  
 $-\omega^2 \Psi + \omega_0^2 \Psi = -v_0^2 k^2 \Psi \Rightarrow k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2) / v_0^2$

a) Αν  $\omega > \omega_0$ ,  $k^2 > 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + v_0^2 k^2$  και  $\Psi = A \cos(\omega t - kz + \phi)$

b) Αν  $\omega < \omega_0$ ,  $k^2 < 0 \Rightarrow k = \pm i k$ ,  $\omega^2 = \omega_0^2 - v_0^2 k^2$  και  $\Psi = A e^{-kz} \cos(\omega t + \phi)$

**Πρόβλημα 4.5**

Μια σημειακή μάζα  $M$  είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο μιας χορδής με χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση  $\rho c$ . Ένα εγκάρσιο κύμα συχνότητας  $\omega$  κινείται κατά τη θετική φορά  $x$  και στη μάζα ανακλάται και εν μέρει μεταδίδεται. Οι συνοριακές συνθήκες είναι ότι οι απομακρύνσεις της χορδής ακριβώς αριστερά και ακριβώς δεξιά από τη μάζα είναι ίσες ( $y_i + y_r = y_f$ ) και ότι η διαφορά μεταξύ των εγκαρσίων δυνάμεων ακριβώς στα αριστερά και ακριβώς στα δεξιά της μάζας είναι ίση με τη μάζα επί την επιτάχυνσή της. Αν  $A_1, B_1$  και  $A_2$  είναι, αντίστοιχα, τα πλάτη του προσπίπτοντος, ανακλωμένου και μεταδιδομένου κύματος, δείξτε ότι

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{-iq}{1+iq} \quad \text{και} \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1+iq}$$

όπου  $q = \omega M / 2\rho c$  και  $i^2 = -1$ .

ΛΥΣΗ

$$\Psi_1 = \Psi_i + \Psi_r \quad \Psi_2 = \Psi_t$$

$$\Psi_1 = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_1 e^{i(\omega t + kx)}$$

$$\Psi_2 = A_2 e^{i(\omega t - kx)}$$

a) Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  για  $\neq t$

$$(1) \Psi_1(x=0) = \Psi_2(x=0) \quad \text{και} \quad (2) M \ddot{\Psi}_2(x=0) = T_2 - T_1 = T \left( \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)_{x=0}$$

$$(1) \rightarrow [A_1 + B_1 = A_2] \quad (1')$$

$$(2) \rightarrow M(i\omega)^2 A_2 = T \left[ -ikA_2 - (-ikA_1 + ikB_1) \right] = iTk(-A_2 + A_1 - B_1)$$

$$\boxed{-M\omega^2 A_2 = iTk(A_1 - B_1 - A_2)} \quad (2'')$$

$$b) \underline{\text{Προτεινεται}} : \quad k = \omega/c, \quad c^2 = T/\rho, \quad kT = \frac{\omega}{c} \cdot c\rho = \omega c \rho$$

$$\text{και} \quad q \equiv \omega M / 2\rho c$$

(4)

$$-\frac{M\omega^2}{iT/k} (A_1 + B_1) = (\cancel{A_1} - \cancel{B_1} - A_1 - B_1) = -2B_1$$

$$\frac{M\omega^2}{i2\omega c\rho} (A_1 + B_1) = B_1$$

$$-i\varrho \left(1 + \frac{B_1}{A_1}\right) = \frac{B_1}{A_1} \Rightarrow \frac{B_1}{A_1} (1 + i\varrho) = -i\varrho$$

Apd 
$$\boxed{\frac{B_1}{A_1} = \frac{-i\varrho}{1+i\varrho}}$$

$$\begin{aligned} A_2 = A_1 + B_1 &\Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 1 + \frac{B_1}{A_1} = 1 + \frac{-i\varrho}{1+i\varrho} = \\ &= \frac{1+i\varrho-i\varrho}{1+i\varrho} = \frac{1}{1+i\varrho} \end{aligned}$$

Apd 
$$\boxed{\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1+i\varrho}}$$

ΔIfejernum: a) Av  $M \rightarrow 0$ ,  $\varrho \rightarrow 0$   $\frac{B_1}{A_1} \rightarrow 0$ ,  $\frac{A_2}{A_1} \rightarrow 1$   
 ΔIfejernum indeksa duktifitano kihet, swotzo

b) Av  $M \rightarrow \infty$ ,  $\varrho \rightarrow \infty$   $\frac{B_1}{A_1} = \frac{-i\varrho(1-i\varrho)}{1+i\varrho} = \frac{-\varrho^2 - i\varrho}{1+\varrho^2} \rightarrow -1+i0$

oni  $A_2/A_1 = \frac{1-i\varrho}{1+i\varrho} = \frac{1}{1+i\varrho} - \frac{i\varrho}{1+i\varrho} \rightarrow 0-i0 = 0$

Yπkexf1 hovo duktifitano tif adagji q̄sma 180°

Πρόβλημα 4.6

Στο πρόβλημα 4.5, γράφοντας  $q = \tan \theta$ , δείξτε ότι το  $A_2$  υστερεί ως προς το  $A_1$  κατά  $\theta$  και ότι το  $B_1$  υστερεί ως προς το  $A_1$  κατά  $(\pi/2 + \theta)$  για  $0 < \theta < \pi/2$ . Δείξτε ότι οι συντελεστές ανακλώμενης και μεταδιδόμενης ενέργειας αντιπροσωπεύονται αντίστοιχα από το  $\sin^2 \theta$  και  $\cos^2 \theta$ .

ΛΥΣΗ

Από το πρόβλημα 4.5  $A_2/A_1 = \frac{1}{1+iq}$ ,  $B_1/A_1 = \frac{-iq}{1+iq}$ ,  $q = \frac{\omega M}{2\rho c}$

Av  $q = \tan \theta$

$$\therefore \text{Τότε } A_2/A_1 = \frac{1}{1+i\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{\cos\theta(\cos\theta-i\sin\theta)}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)} =$$

$$= \frac{\cos\theta e^{-i\theta}}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \boxed{\cos\theta e^{-i\theta}} = A_2/A_1$$

$$\text{και } B_1/A_1 = \frac{-i\tan\theta}{1+i\tan\theta} = \frac{-i\tan\theta \cos\theta}{\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{-i\sin\theta(\cos\theta-i\sin\theta)}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)} =$$

$$= \frac{-i\sin\theta e^{-i\theta}}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \boxed{\sin\theta e^{-i(\pi/2+\theta)}} = B_1/A_1$$

$$y_i = A_1 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$y_r = B_1 e^{i(\omega t + kx)} = A_1 \sin\theta e^{i(\omega t + kx - \pi/2 - \theta)}$$

$$y_t = A_2 e^{i(\omega t - kx)} = A_1 \cos\theta e^{i(\omega t - kx - \theta)}$$

Av  $y_i = A_1 \cos(\omega t - kx)$

Τότε  $y_r = \sin\theta A_1 \cos(\omega t + kx - \pi/2 - \theta)$

και  $y_t = \cos\theta A_1 \cos(\omega t - kx - \theta)$

(5)

$$\sum \text{Το } \text{ ομβρία } x = 0$$

$$\Psi_i = A_i \cos \omega t$$

$$y_r = \sin \theta A_1 \cos(\omega t - \pi/2 - \theta)$$

$$y_t = \cos \theta A_1 \cos(\omega t - \theta)$$

Για  $0 < \theta < \pi/2$   $\sin \theta$  και  $\cos \theta$  είναι θετικά και το αντελαστέρο κύρια υπτερή των ωρογωιώνων μετά  $\pi/2 + \theta$  και το διαδικτύονα υπτερή των ωρογωιώνων μετά  $\theta$

b) Οι συντελεστές αντελασμού και διάδοσης της φύσης είναι:

$$R = \frac{Z_1}{Z_2} \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \sin^2 \theta e^{-i(\pi/2 + \theta)} e^{i(\pi/2 + \theta)} = \sin^2 \theta$$

$$T = \frac{Z_1}{Z_2} \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 = \cos^2 \theta e^{-i\theta} e^{i\theta} = \cos^2 \theta$$

$$(Z_1 = Z_2)$$

**B. ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ** (Να παραδίδονται 2-3 ασκήσεις ανά εβδομάδα)

19. Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής  $f(at-z)$  είναι λύση της κλασικής κυματικής εξίσωσης σε μία διάσταση και παριστά κύμα που ταξιδεύει προς τη θετική διεύθυνση του  $z$ , με ταχύτητα  $a$ . Η  $f(at+z)$  παριστά κύμα που ταξιδεύει προς τα αριστερά (θλέπει και προβλ. 4.1, 4.2 του Pain).

20. Το άκρο μιας ομογενούς χορδής στο σημείο  $z=0$ , διεγείρεται αρμονικά με μια συχνότητα  $v=10$  Hz και με πλάτος 1 cm. Η χορδή έχει άπειρο μήκος (ή αλλιώς είναι προσαρμοσμένη στο τέρμα της ώστε να μην υπάρχουν καθόλου ανακλάσεις). Η ταχύτητα φάσης είναι 5 m/sec. Περιγράψτε (ακριθώς) την κίνηση ενός σημείου της χορδής που θρίσκεται σε απόσταση 3.25 m από το διεγειρόμενο άκρο. Ποια είναι η κίνηση ενός δεύτερου σημείου, που θρίσκεται σε απόσταση 3.5 m από το διεγειρόμενο άκρο.

21. Υποθέστε ότι μια χορδή πιάνου έχει διάμετρο  $d=1$  mm, μήκος  $l=1$  m και είναι κατασκευασμένη από ατσάλι με πυκνότητα  $\rho=7.9$  gr/cm<sup>3</sup>. Η συχνότητα του χαμηλότερου τρόπου ταλάντωσης είναι  $v=440$  Hz. Υπολογίστε την τάση της χορδής σε Nt και σε χιλιόγραμμα βάρους (1 kg θάρους=9.8 Nt). (Απάντηση: περίπου 500 Kgr).

22. Χορδή απείρου μήκους, γραμμικής πυκνότητας  $\rho_0=0.1$  gr/cm και τάσεως  $T_0=3.510^7$  dyn διεγείρεται αρμονικά στο σημείο  $z=0$  με πλάτος  $A=1$  cm και συχνότητα  $v=100$  Hz. Πόση είναι η μέση ακτινοθολούμενη ισχύς σε Watt;  
(Απάντηση:  $P=36.7$  W)

23. Σε χορδή που τείνεται με τάση  $T_0$  και έχει γραμμική πυκνότητα  $\rho_0$  διαδίδονται δύο τρέχοντα κύματα

$$\psi_1(z,t) = A \cos(\omega t - kz + \phi_1), \quad \psi_2(z,t) = A \cos(\omega t - kz + \phi_2)$$

Βρείτε τη μέση διαδιδόμενη ισχύ

24. α) Γράψτε το τρέχον κύμα  $\psi(z,t)=A \cos(\omega t - kz)$  σαν επαλληλία δύο στασίμων κυμάτων.

β) Γράψτε το στάσιμο κύμα  $\psi(z,t)=A \cos \omega t \cdot \cos kz$  σαν επαλληλία δύο τρεχόντων κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

γ) Θεωρήστε την ακόλουθη υπέρθεση τρεχόντων κυμάτων

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t - kz) + R A \cos(\omega t + kz)$$

Δείξτε ότι η  $\psi(z,t)$  μπορεί να γραφεί και σαν επαλληλία δύο στασίμων κυμάτων:

$$\psi(z,t) = A(1+R) \cos \omega t \cdot \cos kz + A(1-R) \sin \omega t \sin kz$$

Δηλαδή, το λόιο κύμα μπορεί να θεωρηθεί είτε σαν επαλληλία στασίμων κυμάτων είτε σαν επαλληλία τρεχόντων κυμάτων (θλέπει και άσκηση 4.13 του Pain),

25. Δίνεται μια χορδή που έχει γραμμική πυκνότητα μ για  $z (-\infty, 0)$  και μ<sub>2</sub> για  $z (0, +\infty)$ . Η χορδή τείνεται με τάση T<sub>1</sub> και T<sub>2</sub> στα αντίστοιχα διαστήματα. Ένα αρμονικό κύμα τρέχει από αριστερά και πέφτει στην ασυνέχεια στο z=0:

a) Δείξτε ότι η εγκάρσια δύναμη επαναφοράς  $F_x(z, t) = -T(\partial \psi / \partial z)$  είναι συνεχής, δηλ.  $-T_1(\partial \psi_1 / \partial z) = -T_2(\partial \psi_2 / \partial z)$  στο z=0, όπου ψ<sub>1</sub> και ψ<sub>2</sub> παριστάγουν το συνιστάμενο κύμα στις περιοχές 1 και 2.

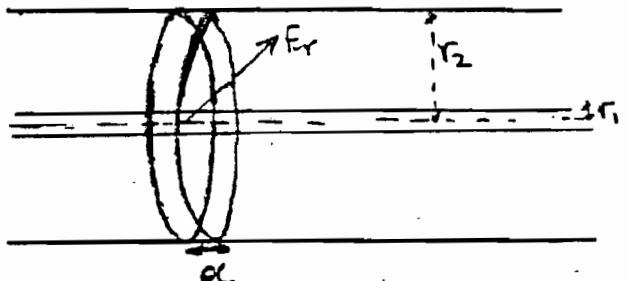
b) Αν  $T_1 = T_2$  δείξτε ότι  $R_{12} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ , δηλου R<sub>12</sub> ο συντελεστής ανακλάσεως και k<sub>1</sub>, k<sub>2</sub> οι κυματαριθμοί των ψ<sub>1</sub> και ψ<sub>2</sub>.

c) Αν  $Z_1 = Z_2$  και  $\mu_2 = \mu_1$  τότε  $\lambda_2 = \lambda_1/a$ .

26. Λύστε την άσκηση 6.1 του Pain

27. Δείξτε ότι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, c/a μιας ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς που αποτελείται από έναν εσωτερικό αγωγό ακτίνας r<sub>1</sub> και έναν εξωτερικό αγωγό ακτίνα r<sub>2</sub>, και με κενό ανάμεσα στους δύο κυλιγραϊκούς αγωγούς, δίνεται από τη σχέση  $c/a = 2\pi\epsilon_0/\ln(r_2/r_1)$

Δείξτε επίσης ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής ανά μονάδα μήκους, δίνεται από τη σχέση  $L/a = (\mu_0/2\pi)\ln(r_2/r_1)$  (βλέπε παράγ. 3.5, 7.8 Berkeley, τόμος II).



28. Δείξτε a) ότι η ταχύτης φάσης για κύματα τάσης ή ρεύματος σε ένα ομοαξονικό καλώδιο είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός.  
b) Η σύνθετη αντίσταση δίνεται από την έκφραση

$$\tilde{Z} = (1/2\pi) \ln(r_2/r_1) \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \quad (\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega)$$

Διδοντας:  $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2 N_f} \frac{A^2}{N_f}$  και  $\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \frac{N_f}{A^2}$