

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Εάν οι τελεστές A, B είναι ερμιτιανοί να δείξετε ότι

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \left(\frac{1}{4}\right) [\langle G \rangle^2 + \langle D \rangle^2]$$

όπου $G = -i(AB - BA)$ και $D = AB + BA$.

Με βάση την προηγούμενη σχέση να αποδειχθεί η γενικευμένη Σχέση Αβεβαιότητας για τα μεγέθη A, B .

Άσκηση 2.

Εξετάστε τότε το γινόμενο αβεβαιότητας δυο ασυμβίβαστων φυσικών μεγεθών παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή του. Δηλαδή τότε ισχύει το ίσον στην γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας.

Εφαρμογή για $A = x, B = p = -i\hbar \frac{d}{dx}$, υποθέτοντας $\langle x \rangle = 0, \langle p \rangle = 0$.

Άσκηση 3.

Εάν Σ είναι ένας ερμιτιανός πίνακας με την ιδιότητα $\Sigma^2 = \mathbb{I}$, όπου \mathbb{I} είναι ο ταυτοτικός πίνακας, να δείξετε ότι

$$\exp(ia\Sigma) = \mathbb{I} \cos(a) + i\Sigma \sin(a)$$

$$\text{Εφαρμογή στους πίνακες του Pauli, } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.

Οι διακριτές ιδιοτιμές της ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα είναι μη εκφυλισμένες.

Άσκηση 5.

Η δυναμική ενέργεια σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα για ένα σωματίδιο μάζας m , είναι ανάλογη της συνάρτησης δέλτα του Dirac ,

$$V(x) = -a\delta(x) \text{ με } a > 0.$$

Να βρεθούν

- Οι στάσιμες καταστάσεις.
- Ο συντελεστής ανάκλασης για ένα προσπίπτον σωματίδιο με ενέργεια $E > 0$.

Άσκηση 6.

Τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας των μετάλλων βρίσκονται δεσμευμένα μέσα στο μέταλλο από ένα φράγμα δυναμικού. Για την μονοδιάστατη προσέγγιση το δυναμικό αυτό περιγράφεται από την συνάρτηση $V(x)$, όπου $V(x) = 0$ για $x < 0$ και $V(x) = V_0$ για $x > 0$. Η μέγιστη ενέργεια που συναντάμε για τα ηλεκτρόνια είναι η ενέργεια E_f του Fermi . Εφαρμόζουμε στο μέταλλο ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο κατά τον άξονα των x .

Βρείτε τον Συντελεστή Διέλευσης T για ένα ηλεκτρόνιο που έχει ενέργεια E_f .

Άσκηση 7.

Υπολογίστε την αβεβαιότητα θέσης Δx και την αβεβαιότητα ορμής Δp για μια τυχούσα ιδιοσυνάρτηση $\Psi_n(x) = N \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ του απειρόβαθου πηγαδιού.

Άσκηση 8.

Ένα σωματίδιο μάζας m είναι υποχρεωμένο να κινείται μέσα σε ένα διδιάστατο ορθογώνιο κουτί με μήκη πλευρών a, b . Να βρεθούν οι επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειάς του.

Άσκηση 9.

Η κατάσταση ενός σωματιδίου σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού περιγράφεται, κατά την χρονική στιγμή $t = 0$, από την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi = N(\Psi_1 + \Psi_2)$$

Όπου Ψ_1 και Ψ_2 οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις των δυο πρώτων ενεργειακών σταθμών του πηγαδιού. Υπολογίστε την μέση θέση του σωματιδίου ύστερα από χρόνο t .

Άσκηση 10.

Να βρείτε τις ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων για σωματίδιο στο πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ -V_0 & , 0 < x < a, V_0 > 0 \\ 0 & , x > a \end{cases}$$

Άσκηση 11.

Να βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας για σωματίδιο στο ασύμμετρο πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} V_3 & , x < 0 \\ V_2 = 0 & , 0 < x < a, \text{ όπου } V_3 > V_1 \text{ και } V_1, V_3 > 0. \\ V_1 & , x > a \end{cases}$$

Άσκηση 12.

Υπολογίστε τις δυνατές τιμές ενέργειας ενός σωματιδίου μέσα σε δυναμικό της μορφής

$$W(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right) m\omega^2 x^2 & , x > 0 \end{cases}$$

Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος;