Κβαντομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΦΕ

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας στον χώρο των ορμών για έναν ταλαντωτή στην πρώτη διεγερμένη στάθμη.
Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί ο ταλαντωτής να έχει ορμή στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή για αυτήν την ενέργεια;

Άσκηση 2.

Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή του τελεστή $(xp_x + p_x x)^2$ ως προς την κυματοσυνάρτηση $\Psi_n, n > 2$, ενός αρμονικού ταλαντωτή.

Άσκηση 3.

$\alpha^\dagger$ και α είναι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για έναν μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των α και $\alpha^\dagger$, και τις ιδιότητες $\alpha^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$, $\alpha\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}$ όπου οι Ψ_n είναι ιδιοσυναρτήσεις του ταλαντωτή.

α) Δείξτε ότι

$$x\Psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}\Psi_n}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\sqrt{n}\Psi_{n-1} - \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}\right)$$

β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $\langle n|x^2|n\rangle$ και $\langle n|P^2|n\rangle$ καθώς και το γινόμενο αβεβαιότητας $(\Delta x)(\Delta P)$.

γ) Γράψτε τους πίνακες x_{nm}, P_{nm} και N_{nm}, όπου N είναι ο τελεστής αριθμού κβάντων (αρίθμησης).

Άσκηση 4.

α) Κάθε γινόμενο τελεστών $\alpha^\dagger$ και α, με το ίδιο πλήθος τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, είναι μια συνάρτηση του τελεστή αρίθμησης N.

β) Δείξτε ότι $a^n\left(\alpha^\dagger\right)^n = (N+1)(N+2)\cdots(N+n)$
και $\left(\alpha^\dagger\right)^n\alpha^n = N(N-1)\cdots(N-n-1)$.

Άσκηση 5.

Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις των δέσμιων καταστάσεων για ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με ένα πρόσθετο δέλτα πηγάδι δυναμικού στο κέντρο του.

Άσκηση 6.

Να υπολογιστούν οι ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων για την μονοδιάστατη δυναμική ενέργεια $V(x) = -\frac{g}{x}$.
Η δυναμική ενέργεια ορίζεται για $x > 0$ με τον περιορισμό $\Psi(0) = 0$, $g > 0$.

Άσκηση 7.

Η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου μάζας m, σε μία διάσταση, δίνεται από την σχέση

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \wedge x > \alpha \\ 0, & 0 \leq x < \beta \wedge \gamma < x \leq \alpha \\ V_0, & \beta \leq x \leq \gamma \end{cases}$$

Θεωρώντας το V_0 σαν διαταραχή να υπολογίσετε τις ενέργειες W_n και τις κυματοσυναρτήσεις Φ_n του σωματιδίου σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

Άσκηση 8.

Σωματίδιο μάζας m, στην μια διάσταση, έχει δυναμική ενέργεια $V(x) = V_0 e^{\lambda x^2}$ με $\lambda > 0$. Υπολογίστε προσεγγιστικά την θεμελιώδη και την πρώτη διεγερμένη στάθμη.

Άσκηση 9.

Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου μάζας m στο επίπεδο (x, y) δίνεται από την σχέση

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + cxy$$

Όπου c είναι μια σταθερά.

α) Να υπολογιστούν οι ενέργειες και οι κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου για $c = 0$.

β) Εάν $c \neq 0$ και $c \ll m\omega^2$, να υπολογιστούν σε πρώτη τάξη της θεωρίας των διαταραχών οι ενέργειες της χαμηλότερης εκφυλισμένης στάθμης του πρώτου ερωτήματος.

γ) Να υπολογίσετε ακριβώς τις ενέργειες και τις κυματοσυναρτήσεις του συστήματος για κάθε $c < m\omega^2$.

Υπόδειξη, να ορίσετε δυο νέες μεταβλητές, τις $x = v + z$ και $y = v - z$.

Άσκηση 10.

Την χρονική στιγμή $t = 0$, ένα κβαντομηχανικό σύστημα είναι σε μια κατάσταση $\Psi_1^{(0)}$, η οποία ανήκει σε μια διπλά εκφυλισμένη στάθμη. Να οριστεί η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $\Psi_2^{(0)}$ με την ίδια αδιατάραχτη ενέργεια κάποια χρονική στιγμή $t \neq 0$. Η μετάβαση οφείλεται στην δράση μιας διαταραχής $V(x)$ χρονικά σταθερής.

Άσκηση 11.

Φορτισμένος αρμονικός ταλαντωτής στην κατάσταση Ψ_n αλληλεπιδρά με ένα περαστικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο της μορφής

$$\vec{\mathscr{E}}(t) = \vec{\mathscr{E}}_0 e^{-\lambda t^2} \quad , \lambda > 0, \vec{\mathscr{E}}_0 = \mathscr{E}_0 \hat{x}$$

Βρείτε το πλάτος μετάβασης στην κατάσταση Ψ_k.

Άσκηση 12.

Ένα ομαλό ηλεκτρικό πεδίο δρά ξαφνικά σε έναν φορτισμένο αρμονικό ταλαντωτή στην θεμελιώδη κατάσταση. Να ορίσετε την πιθανότητα μετάβασης του ταλαντωτή στις διεγερμένες καταστάσεις.