

## Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

### Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

#### Άσκηση 1.

Ένα σωματίδιο μάζας  $M$  είναι αναγκασμένο να κινείται στην επιφάνεια μιάς σφαίρας ακτίνας  $R$ . Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας του σωματιδίου.

#### Άσκηση 2.

Ένα σωματίδιο μάζας  $M$  κινείται επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας  $R$ . Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας του σωματιδίου.

#### Άσκηση 3.

Να δείξετε ότι σε μία κατάσταση με καθορισμένη τιμή του  $L_z$  οι μέσες τιμές των  $L_x$  και  $L_y$  είναι ίσες με το μηδέν.

#### Άσκηση 4.

Ένα σωματίδιο μάζας  $M$  κινείται υπό την επίδραση του κεντρικού δυναμικού  $V(r)$  όπου:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & , r > \alpha \\ 0 & , r < \alpha \end{cases}$$

Δηλαδή βρίσκεται μέσα σε ένα σφαιρικό πηγάδι δυναμικού.

- Γράψτε την Χαμιλτονιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες και ξεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.
- Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του σωματιδίου για στροφορμή  $l = 0$ .

#### Άσκηση 5.

Εάν  $\vec{A}$  και  $\vec{B}$  είναι δυο τυχόντα διανύσματα και  $\sigma_k$  οι πίνακες του Pauli, αποδείξτε την σχέση:  
 $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

#### Άσκηση 6.

Εάν  $J_x$ ,  $J_y$  και  $J_z$  είναι οι τελεστές που παριστάνουν τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος της στροφορμής.

- Υπολογίστε τον τελεστή  $A = e^{i\gamma J_y} J_z e^{-i\gamma J_y}$  όπου  $\gamma$  είναι ένας πραγματικός αριθμός.
- Δείξτε ότι η συνάρτηση  $e^{-i(\frac{\pi}{2\hbar}) J_y} Y_{jm}$  είναι ιδιοσυνάρτηση των  $\vec{J}^2$  και  $J_x$ .

### Άσκηση 7.

- α) Βρείτε τον πίνακα που παριστάνει την προβολή του διανύσματος του spin σε μια τυχούσα κατεύθυνση  $(\theta, \phi)$ .
- β) Βρείτε το διάνυσμα  $\mathcal{X}$  που περιγράφει μία κατάσταση με καθορισμένη προβολή του spin σε αυτή την διεύθυνση.

### Άσκηση 8.

Ένα σωματίδιο έχει καθορισμένη τιμή του spin κατά τον άξονα των  $z$  ίση με  $\left(\frac{\hbar}{2}\right)$ .

- α) Υπολογίστε την μέση τιμή της συνιστώσας του spin στην κατεύθυνση  $\vec{n}$  που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα των  $z$ .
- β) Δείξτε ότι έχει ιδιοτιμές  $\pm \frac{\hbar}{2}$
- γ) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρούμε σε μία μέτρηση της προβολής του spin κατά τον άξονα  $\vec{n}$  την τιμή  $\left(\frac{\hbar}{2}\right)$  και  $\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$  αντίστοιχα.

### Άσκηση 9.

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $F(r, \theta, \phi)$  η οποία μετατίθεται με τους τρεις τελεστές της στροφορμής, είναι συνάρτηση μόνο του  $r$ .
- β) Εάν η συνάρτηση  $F(x, y, z)$  μετατίθεται μόνο έναν από τους τελεστές  $L_x, L_y$  ή  $L_z$ , τότε αυτή πρέπει να παρουσιάζει αξονική συμμετρία γύρω από τον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων.

### Άσκηση 10.

- α) Να δράσετε στην ιδιοσυνάρτηση  $Y_{22}$  με τον τελεστή  $L_-$  και να προσδιορίσετε τις  $Y_{21}$  και  $Y_{20}$ .
- β) Προσδιορίστε επίσης τις  $Y_{2,-1}$  και  $Y_{20}$  δρώντας στην  $Y_{2,-2}$  με τον  $L_+$ .

### Άσκηση 11.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $\Psi(\vec{r}) = cre^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta$  μπορεί να θεωρηθεί κυματοσυνάρτηση μιας στάσιμης κατάστασης ενός φυσικού συστήματος το οποίο έχει δυναμική ενέργεια  $V(r) = \frac{\gamma}{r}$ , όπου  $\gamma$  σταθερά, και ορισμένη στροφορμή.

Να υπολογίσετε:

- α) Την ενέργεια  $E$  του συστήματος.
- β) Την σταθερά  $\gamma$ .
- γ) Τον κβαντικό αριθμό  $l$  της στροφορμής του συστήματος.

### Άσκηση 12.

Η κυματοσυνάρτηση ενός ατόμου του υδρογόνου την χρονική στιγμή  $t = 0$  δίνεται από την σχέση  $\Psi(\vec{r}, 0) = 2c\Psi_{211}(r, \theta, \phi) + cY_{32,-1}(r, \theta, \phi)$

όπου οι κυματοσυναρτήσεις  $\Psi_{211}(r, \theta, \phi)$  και  $Y_{32,-1}(r, \theta, \phi)$  είναι κανονικοποιημένες.

Να υπολογίσετε την τυχαία χρονική στιγμή  $t$

- α) Την κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση του ατόμου.
- β) Τις δυνατές τιμές της  $z$  συνιστώσας της στροφορμής.
- γ) Την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου της στροφορμής.