Κβαντομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΦΕ

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

$$\langle A^2\rangle = \int \Psi^* A^2 \Psi \mathrm{d}x = \int (A\Psi)^*(A\Psi)\mathrm{d}x$$
$$\langle B^2\rangle = \int \Psi^* B^2 \Psi \mathrm{d}x = \int (B\Psi)^*(B\Psi)\mathrm{d}x$$

Ανισότητα του Schwartz :

$$\left(\int \Phi_1^*\Phi_1 \mathrm{d}x\right)\left(\int \Phi_2^*\Phi_2 \mathrm{d}x\right) \geqslant \left|\int \Phi_1^*\Phi_2 \mathrm{d}x\right|^2$$
$$\Rightarrow \langle A^2\rangle\langle B^2\rangle = \left(\int (A\Psi)^*(A\Psi)\mathrm{d}x\right)\left(\int (B\Psi)^*(B\Psi)\mathrm{d}x\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left|\int (A\Psi)^*(B\Psi)\mathrm{d}x\right|^2 =$$
$$= \left|\int \Psi^* AB\Psi \mathrm{d}x\right|^2 = |\langle A\rangle|^2 =$$
$$= (\mathrm{Re}\langle AB\rangle)^2 + (\mathrm{Im}\langle AB\rangle)^2$$

Ο τελεστής $C = AB$ δεν είναι ερμιτιανός άρα η μέση τιμή του $\langle C\rangle = \langle AB\rangle$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός.
Ορίζουμε τον C σαν το μιγαδικό άθροισμα δυο ερμιτιανών τελεστών.
Έχουμε

$$C^\dagger = (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$$
$$C = \frac{1}{2}(AB + BA) + i\frac{1}{2i}(AB - BA) =$$
$$= \frac{1}{2}(G + iD)$$
$$G^\dagger = G, \quad D^\dagger = D, \quad G = AB + BA, \quad D = \frac{1}{i}(AB - BA)$$
$$\Rightarrow \langle C\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle G\rangle + i\langle D\rangle\right)$$
$$\langle G\rangle, \langle D\rangle \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow |\langle AB\rangle|^2 = |\langle C\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left(\langle G\rangle^2 + \langle D\rangle^2\right)$$

Άρα

$$\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\left(\langle G\rangle^2 + \langle D\rangle^2\right)$$

Θα παοδείξουμε τώρα την γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας

$$|\langle AB\rangle|^2 \geqslant \frac{1}{4}\langle D\rangle^2$$

Όπου $\langle D\rangle \in \mathbb{R}$ και άρα $\langle D\rangle^2 \in \mathbb{R}^+$.
Έτσι

$$i\langle D\rangle = \langle (AB - BA)\rangle = \langle [A,B]\rangle$$
$$i^2\langle D\rangle^2 = \langle [A,B]\rangle^2$$
$$\Rightarrow \langle D\rangle^2 = -\langle [A,B]\rangle^2$$

δηλαδή ο $\langle [A,B]\rangle^2$ είναι αρνητικός αριθμός.
Άρα

$$\langle D\rangle^2 = \left|\langle [A,B]\rangle^2\right|$$
$$\Rightarrow \langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\left|\langle [A,B]\rangle^2\right|$$

επειδή $\langle [A,B]\rangle = i\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
τότε $\langle [A,B]\rangle^2 = -\alpha^2$
και $\left|\langle [A,B]\rangle^2\right| = \alpha^2 = |\langle [A,B]\rangle|^2$

$$\Rightarrow \langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\left|\langle [A,B]\rangle\right|^2 \qquad \blacksquare$$

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle$$
$$(\Delta B)^2 = \langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2 = \langle (B - \langle B\rangle)^2\rangle$$
$$\langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle\langle (B - \langle B\rangle)^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\left|\langle [A - \langle A\rangle, B - \langle B\rangle]\rangle\right|^2$$

αλλά $[A - \langle A\rangle, B - \langle B\rangle] = (A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle) - (B - \langle B\rangle)(A - \langle A\rangle) = AB - BA = [A,B]$

$$\Rightarrow (\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geqslant \frac{1}{4}\left|\langle [A,B]\rangle\right|^2$$
$$\Rightarrow (\Delta A)(\Delta B) \geqslant \frac{1}{2}\left|\langle [A,B]\rangle\right| \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 2.

Για να έχουμε την ισότητα στην γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας θα πρέπει να ισχύουν δυο ισότητες.

Πρώτον από την ανισότητα του Schwartz τα δυο διανύσματα Φ_1 και Φ_2 θα πρέπει να είναι παράλληλα μεταξύ τους

$$\Rightarrow (A - \langle A \rangle)\Psi = c(B - \langle B \rangle)\Psi$$

Δεύτερον θα πρέπει η $\langle G \rangle = 0$
δηλαδή $\langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) + (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle) \rangle = 0$
εάν θέσουμε $A' = A - \langle A \rangle$ και $B' = B - \langle B \rangle$, τότε

$$\begin{aligned}
&\langle A'B' \rangle + \langle B'A' \rangle = 0 \\
&\Rightarrow c^* \langle B'B' \rangle + c \langle B'B' \rangle = 0 \\
&\Rightarrow (c + c^*) \langle B'B' \rangle = 0 \Rightarrow c + c^* = 0 \\
&c = i\alpha \\
&(A - \langle A \rangle)\Psi = i\alpha(B - \langle B \rangle)\Psi \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Εφαρμογή:
Έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}
&x\Psi = (i)(-i)\alpha\hbar \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} \\
&\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\alpha\hbar}\Psi \Rightarrow \Psi(x) = Ne^{\frac{x^2}{2\alpha\hbar}}
\end{aligned}$$

Για να είναι κανονικοποιημένη η κυματοσυνάρτηση θέλουμε $\alpha < 0$.
Θέτουμε $\lambda = -\frac{1}{\alpha\hbar} > 0$

$$\Rightarrow \Psi(x) = Ne^{-\lambda \frac{x^2}{2}} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 3.

$$
\begin{aligned}
&e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \\
&\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \\
&\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{51} + \cdots \\
&e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{51} + \cdots\right) \\
&\Sigma^2 = \mathbb{I}, \quad \Sigma^3 = \Sigma\Sigma^2 = \Sigma, \quad \Sigma^4 = \mathbb{I}, \quad \Sigma^5 = \Sigma, \quad \ldots \\
&\Rightarrow e^{i\alpha\Sigma} = \mathbb{I} + (i\alpha\Sigma) + \frac{(i\alpha\Sigma)^2}{2!} + \frac{(i\alpha\Sigma)^3}{3!} + \frac{(i\alpha\Sigma)^4}{4!} + \cdots \\
&= \mathbb{I}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} + \cdots\right) + i\Sigma\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{51} + \cdots\right) \\
&= \mathbb{I}\cos(\alpha) + i\Sigma\sin(\alpha) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Άσκηση 4.

Έστω ότι έχουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις Ψ_1 και Ψ_2 με την ίδια ιδιοενέργεια E. Τότε

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\Psi_1 \\
&\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\Psi_2 \\
&\Rightarrow \frac{\Psi_1''}{\Psi_1} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right) = \frac{\Psi_2''}{\Psi_2} \\
&\Rightarrow \Psi_2\Psi_1'' - \Psi_1\Psi_2'' = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Psi_2\Psi_1' - \Psi_1\Psi_2'\right) = 0
\end{aligned}
$$

Άρα η ποσότητα $\Psi_2\Psi_1' - \Psi_1\Psi_2'$ είναι μια σταθερά και μάλιστα είναι μηδέν διότι $\Psi_1, \Psi_2 \to 0$ όταν $x \to \infty$. Έτσι

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Psi_1'}{\Psi_1} = \frac{\Psi_2'}{\Psi_2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(\Psi_1)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(\Psi_2)) \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(\frac{\Psi_1}{\Psi_2}\right)\right) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{\Psi_1}{\Psi_2}\right) = \alpha \\
&\Rightarrow \frac{\Psi_1}{\Psi_2} = \beta \Rightarrow \Psi_1 = \beta\Psi_2 \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Άσκηση 5.

α)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}-\alpha\delta(x)\Psi=E\Psi$$

για $x\neq 0$ έχουμε μόνο τον κινητικό όρο

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi$$

εάν $E<0$.
Τότε ορίζουμε

$$k^2=-\frac{2mE}{\hbar^2}=\frac{2m\,|E|}{\hbar^2}>0$$

και η λύση είναι η δέσμια κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x)=\begin{cases} Be^{kx} & ,x<0\\ Ae^{-kx} & ,x>0\end{cases}$$

Αφού μάλιστα η $\Psi(x)$ είναι συνεχής στο μηδέν, προκύπτει ότι $A=B$ και $\Psi(x)=Ae^{-k|x|}$.
Προσδιορισμός του E:
Ολοκληρώνουμε την εξίσωση του Schrödinger στο διάστημα $(-\epsilon,\epsilon)$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Psi''\mathrm{d}x-\alpha\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)\Psi(x)\mathrm{d}x=E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Psi(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Psi(x)\mathrm{d}x\xrightarrow[\epsilon\to 0]{}0,\qquad \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)\Psi(x)\mathrm{d}x=\Psi(0)$$
$$\int_{\epsilon}^{-\epsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Psi')\mathrm{d}x=\Psi'(x=\epsilon)-\Psi'(x=-\epsilon)$$

για $\epsilon\to 0$ έχουμε

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[(-Ak)-(Ak)\right]-\alpha A=0$$
$$\Rightarrow \frac{\hbar^2 k}{m}=\alpha\Rightarrow k=\frac{m\alpha}{\hbar^2}\Rightarrow k^2=\frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4}$$
$$\frac{2m\,|E|}{\hbar^2}=\frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4}\Rightarrow |E|=\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

Προσδιορισμός του A:
Κανονικοποίηση της $\Psi(x)$

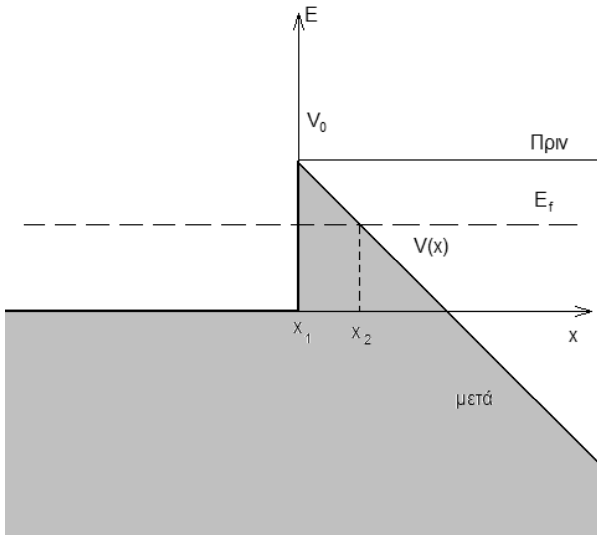
$$\Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k|x|}\mathrm{d}x = 1$$
$$\Rightarrow 1 = 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx}\mathrm{d}x = \frac{2A^2}{2k} \Rightarrow A^2 = k$$
$$\Rightarrow A = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} \qquad \blacksquare$$

β) Έστω κύμα προσπίπτον από τα αριστερά

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' - \alpha\delta(x)\Psi = E\Psi, \quad E > 0$$
$$\Psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0$$
$$\Psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad x < 0$$
$$\Psi_2(x) = Fe^{ikx}, \quad x > 0$$
$$\Psi_1(x=0) = \Psi_2(x=0) \Rightarrow A + B = F$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = ikA - ikB = ik(A-B)$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = ikF$$
$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[ikF - ik(A-B)\right] = \alpha(A+B)$$
$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[ik(A+B) - ik(A-B)\right] = \alpha(A+B)$$
$$\Rightarrow B = i\frac{m\alpha}{k\hbar^2}(A+B) \Rightarrow B = i\frac{\beta}{1-i\beta}A$$

με $\beta = \frac{m\alpha}{k\hbar^2}$.
Έχουμε τελικά

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$
$$T = 1 - R = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad \blacksquare$$



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 6

Άσκηση 6.

Ο συντελεστής διέλευσης είναι:

$$T \simeq e^{-2\int_{x_1}^{x_2} k_2(x)\mathrm{d}x} = e^{-2\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V(x)-E_f)}\mathrm{d}x}$$

βρίσκουμε λοιπόν τα x_1, x_2 και $V(x)$.

$$V(x) - V(0) = \int_x^0 e\vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = \int_x^0 B\mathrm{d}x = -Bx, \quad V(0) = V_0$$
$$\Rightarrow V(x) = V_0 - eBx$$

σημεία $x_1, x_2 \Rightarrow E_f = V_0 - eBx_2$

$$x_{1=0}$$
$$eBx_2 = V_0 - E_f$$
$$x_2 = \frac{V_0}{eB} - \frac{E_f}{eB} \Rightarrow x_2 = \frac{(V_0 - E_f)}{eB}$$

Ορίζουμε $W = V_0 - E_f =$ συνάρτηση έργου

$$x_2 = \frac{W}{eB}$$

$$T = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^{x_2}\sqrt{V_0 - E_f - eBx}\mathrm{d}x\right)$$

$$T = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^{\frac{W}{eB}}\sqrt{W - eBx}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^{\frac{W}{eB}}\sqrt{eB}\sqrt{\frac{W}{eB} - x}\mathrm{d}x\right)$$

Όμως

$$\int_0^{x_2}\sqrt{x_2 - x}\mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{3}\right)(x_2 - x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}(x_2)^{\frac{3}{2}}$$

Άρα

$$T = \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar}\frac{W^{\frac{3}{2}}}{eB}\right)$$

που είναι ο τύπος των Fowler - Nordheim. ■

Άσκηση 7.

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

όπου $N = \sqrt{\frac{2}{L}}$ λόγω κανονικοποίησης.

$$\langle x\rangle = \int_0^L x\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^L x^2\left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right)\mathrm{d}x$$

Ξέρουμε ότι

$$\int x\sin^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} - x\frac{\sin(2ax)}{4a} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2}$$
$$\int x^2\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin(ax)$$

Άρα

$$\langle x^2\rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}$$
$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \frac{L}{\sqrt{12}}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$$
$$\langle p\rangle = 0$$

$$\langle p^2\rangle = (-i\hbar)^2\int_0^L \Psi(x)\Psi''(x)\mathrm{d}x =$$
$$= (-i\hbar)^2\left(\int_0^L (\Psi(x)\Psi'(x))'\mathrm{d}x - \int_0^L \Psi'(x)\Psi'(x)\mathrm{d}x\right) =$$
$$= 0 + \hbar^2\int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα όμως έχουμε

$$H = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p^2 = 2mH$$
$$\Rightarrow \langle p^2\rangle = 2m\langle H\rangle = 2mE_n = 2m\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$$
$$\Rightarrow \langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2\pi^2}{L^2}n^2 \Rightarrow \Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle} = \frac{\hbar\pi}{L}n$$

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{12}}n\left(1 - \frac{6}{n^2p^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$n = 0 \Rightarrow (\Delta x)(\Delta p) = \hbar\frac{\pi}{\sqrt{12}}\sqrt{1 - \frac{6}{\pi^2}} \simeq 0.568\hbar$$

Άσκηση 8.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)+V(x,y)\Psi=E\Psi\\
&V(x,y)=\begin{cases}\infty & ,\{x<0\vee x>a\}\wedge\{y<0\vee y>b\}\\ 0 & ,\{0<x<a\}\wedge\{0<y<b\}\end{cases}\\
&\Psi(x,y)=\Psi_1(x)\Psi_2(y),\quad E=E_1+E_2\\
&\Psi(x=0,y=0)=0,\Psi(x=a,x=b)=0
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του Schrödinger έχουμε δυο εξισώσεις που πρέπει να ισχύουν συγχρόνως:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}x^2}=E_1\Psi_1 \tag{1}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}x^2}=E_2\Psi_2 \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
&(1)\Rightarrow\quad k_1^2=\frac{2mE_1}{\hbar^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}x^2}=-k_1^2\Psi_1\\
&\Psi_1(x)=\sin k_1x\\
&k_1a=n_1\pi\Rightarrow k_1=n_1\frac{\pi}{a},\quad n_1=1,2,\ldots\\
&2\frac{mE_1}{\hbar^2}=\frac{n_1^2\pi^2}{a^2}\\
&\Rightarrow\begin{cases}\Psi_{n_1}=\sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right)\\ \\ E_{n_1}=n_1^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2)\Rightarrow\quad\begin{cases}\Psi_{n_2}=\sin\left(\frac{n_2\pi}{b}x\right)\\ \\ E_{n_2}=n_2^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mb^2}\end{cases}\\
&\Rightarrow\Psi_{n_1,n_2}(x,y)=A_{n_1,n_2}\sin\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right)\\
&E_{n_1,n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}yA_{n_1,n_2}^2\sin^2\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right)=1\\
&\Rightarrow A=\frac{2}{\sqrt{ab}}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 9.

$$\int \Psi^*(x,0)\Psi(x,0)\mathrm{d}x = 1$$
$$\Rightarrow \int \Psi^*(x,0)\Psi(x,0)\mathrm{d}x = N^*N \int (\Psi_1^* + \Psi_2^*)(\Psi_1+\Psi_2)\mathrm{d}x =$$
$$= N^*N\left(\int \Psi_1^*\Psi_1\mathrm{d}x + \int \Psi_2^*\Psi_2\mathrm{d}x\right) = 2N^*N$$
$$\Rightarrow N^2 = \frac{1}{2}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}}, N \in \mathbb{R}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1(x)e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + \Psi_2(x)e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)$$
$$\langle x\rangle_t = \int \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^L x\Psi_1^*(x)\Psi_1(x)\mathrm{d}x + \int_0^L x\Psi_2^*(x)\Psi_2(x)\mathrm{d}x\right.$$
$$\left. + \int_0^L x\Psi_1^* e^{i\frac{E_1 t}{\hbar}}\Psi_2(x)e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\mathrm{d}x + \int_0^L x\Psi_2^* e^{i\frac{E_2 t}{\hbar}}\Psi_1(x)e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\mathrm{d}x\right)$$

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$
$$\Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad E_2 = 4\frac{\hbar^2\pi^2}{2L^2}$$
$$\frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_0^L \left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{L^2}{\pi^2}\right)\sin^2\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}\frac{\pi x}{L}$$
$$= \frac{2L}{\pi^2}\int_0^L y\sin^2 y\mathrm{d}y = \frac{2L}{\pi^2}\left(\frac{y^2}{4} - \frac{y\sin 2y}{4} - \frac{\cos 2y}{8}\right)\Big|_0^\pi$$
$$= \frac{2L}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - 0 - \frac{1}{8}(1-1)\right) = \frac{2L}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4} = \frac{L}{2}$$

ομοίως

$$\frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}$$

Έτσι

$$\langle x\rangle_t = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{i(E_1-E_2)\frac{t}{\hbar}} + e^{-i(E_1-E_2)\frac{t}{\hbar}}\right)\int_0^L \Psi_1(x)x\Psi_2(x)\mathrm{d}x$$

Ορίζουμε:

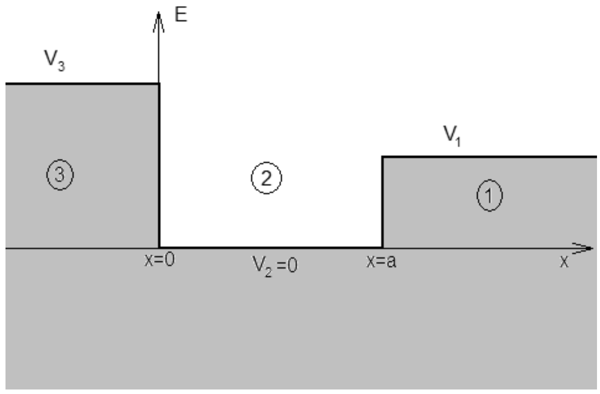
$$w_{12} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}, \quad \langle x \rangle_{12} = \int_0^L \Psi_1(x) x \Psi_2(x) \mathrm{d}x$$
$$\langle x \rangle_t = \frac{L}{2} + \langle x \rangle_{12} \cos(w_{12} t)$$

Τέλος ισχύει,

$$\langle x \rangle_{12} = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = -\frac{16}{9\pi^2} L$$

καθώς

$$2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 11

Άσκηση 11.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\Psi=E\Psi$$

Ζητάμε το διακριτό φάσμα, άρα έχουμε: $V_3 > V_1 > E$
Λύνουμε το πρόβλημα κατά περιοχές:

$$3) \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_3}{\mathrm{d}x^2}+V_3\Psi_3=E\Psi_3, \quad k_3^2=\frac{2m}{\hbar^2}(V_3-E)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi_3}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2m}{\hbar^2}(V_3-E)\Psi_3$$
$$\Psi_3''=k_3^2\Psi_3 \Rightarrow \Psi_3(x)=A_3e^{k_3x}$$

$$2) \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}x^2}=E\Psi_2, \quad k_2^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$$
$$\Psi_2''=-k_2^2\Psi_2$$
$$\Rightarrow \Psi_2(x)=A_2e^{ik_2x}+B_2e^{-ik^2x}$$

$$1) \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}x^2}+V_1\Psi_1=E\Psi_1, \quad k_1^2=\frac{2m}{\hbar^2}(V_1-E)$$
$$\Psi_1''=k_1^2\Psi_1 \Rightarrow \Psi_1(x)=B_1e^{-k_1x}$$

Η $\Psi(x)$ είναι συνεχής για $x=0$ και $x=a$.
Επίσης, η $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}$ είναι συνεχής και αυτή στα ίδια σημεία.

Έτσι

$$\begin{aligned}
&x=0 \quad A_3 = A_2 + B_2\\
&A_3k_3 = iA_2k_2 - iB_2k_2\\
&x=a \quad B_1 = A_2e^{ik_2a} + B_2e^{-ik_2a}\\
&-B_1k_1 = iA_2k_2e^{ik_2a} - iB_2k_2e^{-ik_2a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x=0 \quad A_2k_3 + B_2k_3 = iA_2k_2 - iB_2k_2\\
&\Rightarrow A_2(k_3 - ik_2) = -B_2(k_3 + ik_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x=a \quad -A_2k_1e^{ik_2a} - B_2k_1e^{-ik_2a} = iA_2k_2e^{ik_2a} - iB_2k_2e^{-ik_2a}\\
&\Rightarrow -A_2(k_1 + ik_2)e^{ik_2a} = B_2(k_1 - ik_2)e^{-ik_2a}
\end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

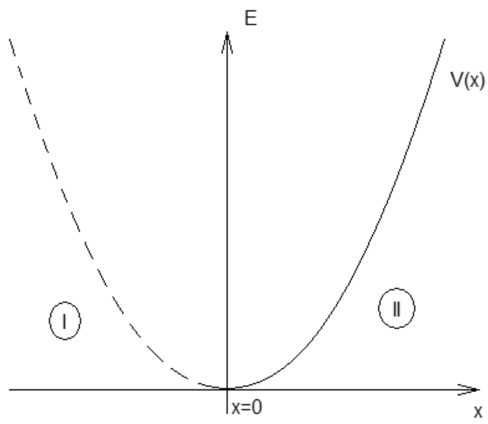
$$\begin{aligned}
&\frac{k_1 + ik_2}{k_3 - ik_2}e^{ik_2a} = \frac{k_1 - ik_2}{k_3 + ik_2}e^{-ik_2a}\\
&e^{i2k_2a} = \frac{(k_1 - ik_2)(k_3 - ik_2)}{(k_1 + ik_2)(k_3 + ik_2)}
\end{aligned}$$

Την παραπάνω εξίσωση την λύνουμε γραφικά. ■

Υπόδειξη:
$e^{2ik_2u} = [\text{Πραγματικό Μέρος}] + i[\text{Φανταστικό Μέρος}]$
Ορίζουμε τους αδιάστατους αριθμούς
$z = 2k_2a = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{E}a$, $z_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{V_1}a$ και $Ez_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{V_3}a$.
Έτσι

$$\tan(z) = -\frac{z\sqrt{z_1^2 - \frac{z^2}{4}}\left(z_3^2 - \frac{z^2}{2}\right) + \left(z_1^2 - \frac{z^2}{2}\right)z\sqrt{z_3^2 - \frac{z^2}{4}}}{\left(z_1^2 - \frac{z^2}{2}\right)\left(z_3^2 - \frac{z^2}{2}\right) - z^2\sqrt{z_1^2 - \frac{z^2}{4}}\sqrt{z_3^2 - \frac{z^2}{4}}}$$

Η γραφική λύση συνίσταται στην εύρεση των σημείων τομής των γραφημάτων που προκύπτουν από το αριστερό και δεξί μέλος ξεχωριστά της παραπάνω παράστασης με τον περιορισμό για το z, $4z_1^2 \geqslant z^2$.



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 12

Άσκηση 12.

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\Psi = E\Psi$$

Περιοχή I: $\Psi_1(x) = 0$
Περιοχή II: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}mx^2\omega^2\Psi_2 = E\Psi_2$ με την συνθήκη $\Psi_2(x=0) = 0$.
Οι συναρτήσεις $\Psi_n(x) = c_n e^{-a\frac{x^2}{2}} H_n(\sqrt{\alpha}x)$ με $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$ ικανοποιούν την εξίσωση του Schrödinger για κάθε x, με ενέργεια $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.
Τα $H_n(\sqrt{\alpha}x)$ είναι πολυώνυμα του $\sqrt{\alpha}x$ άρτια ή περιττά ανάλογα με το n.
Άρα για $n = 2k+1 \Rightarrow H_{2k+1}(\sqrt{\alpha}x) =$ πολυώνυμο περιττού βαθμού.

$$\Rightarrow H_{2k+1}(x=0) = 0$$

$$\Rightarrow \Psi(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ c_{2k+1}e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}H_{2k+1}(\sqrt{\alpha}x) & , x > 0 \end{cases}$$

Ελάχιστη ενέργεια:

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$