# Κβαντομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΦΕ

## Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

### Άσκηση 3.

α)

$$
\begin{aligned}
&\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\
&\hat{\alpha}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\
&2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger) \\
&2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger) \\
&x\Psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{\alpha}\Psi_n + \hat{\alpha}^\dagger\Psi_n) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \\
&\frac{\mathrm{d}\Psi_n}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{\alpha}\Psi_n - \hat{\alpha}^\dagger\Psi_n) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} - \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

β)

$$
\begin{aligned}
&\langle n|x^2|x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_n x^2 \Psi_n \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}(x\Psi_n)(x\Psi_n)\mathrm{d}x \\
&x\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \\
&\alpha = \frac{m\omega}{\hbar} \\
&x^2\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\sqrt{n}x\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}x\Psi_{n+1}) = \\
&= \frac{1}{2\alpha}(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\Psi_{n-2} + \sqrt{n}\sqrt{n}\Psi_n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\Psi_n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\Psi_{n+2}) \\
&\Rightarrow \langle n|x^2|n\rangle = \frac{1}{2\alpha}\langle n|n\rangle(n + (n+1)) = \frac{2n+1}{2\alpha} \\
&p\Psi_n = (-i\hbar)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} - \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \\
&p^2\Psi_n = (-i\hbar)^2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{n}\frac{\mathrm{d}\Psi_{n-1}}{\mathrm{d}x} - \sqrt{n+1}\frac{\mathrm{d}\Psi_{n+1}}{\mathrm{d}x}\right) = \\
&= (-\hbar^2)\frac{\alpha}{2}(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\Psi_{n-2} - \sqrt{n}\sqrt{n}\Psi_n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\Psi_n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\Psi_{n+2}) \\
&\Rightarrow \langle n|p^2|n\rangle = (-\hbar^2)\frac{\alpha}{2}\langle n|n\rangle(-n-(n+1)) = \hbar^2\frac{2n+1}{2}\alpha
\end{aligned}
$$

$$\langle x\rangle = \langle n|x|n\rangle = 0, \quad \langle p\rangle = \langle n|p|n\rangle = 0$$
$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{2n+1}{2\alpha}(\hbar^2)\frac{2n+1}{2}\alpha = \frac{(2n+1)^2}{4}\hbar^2$$
$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{2n+1}{2}\hbar \qquad \blacksquare$$

γ)

$$x\,|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\sqrt{m}\,|m-1\rangle + \sqrt{m+1}\,|m+1\rangle)$$
$$x_{nm} = \langle n|x|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{m}\langle n|m-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle$$
$$x_{nm} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\alpha}}\delta_{n,n+1} & , n = m-1 \Rightarrow m = n+1 \\ \\ \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\alpha}}\delta_{n,n-1} & , n = m+1 \Rightarrow m = n-1 \end{cases}$$
$$(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \sqrt{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$p\,|m\rangle = -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{m}\,|m-1\rangle - \sqrt{m+1}\,|m+1\rangle)$$
$$p_{nm} = \langle n|p|m\rangle = -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{m}\langle n|m-1\rangle + \sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle)$$
$$p_{nm} = \begin{cases} -i\hbar\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{n+1} & , m = n+1 \\ \\ i\hbar\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{n} & , m = n-1 \end{cases}$$

$$N\,|m\rangle = \hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha}\,|m\rangle = \sqrt{m}\hat{a}^\dagger\,|m-1\rangle = m\,|m\rangle$$
$$N_{nm} = \langle n|N|m\rangle = m\langle n|m\rangle = n\delta_{n,m}$$
$$(N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

## Άσκηση 4.

α) Έστω $\hat{A} = \alpha^n (\alpha^\dagger)^n$

Εάν ο τελεστής $\hat{A}$ δράσει σε μια ιδιοσυνάρτηση του $N$, έστω την $\Psi_k$, τότε θα την επαναφέρει στον εαυτό της αφού η συνολική μετατόπιση που προκαλείται στην ιδιοτιμή $k$ θα είναι μηδέν.

$$\hat{A}\Psi_k = f(k)\Psi_k, \quad \hat{N}\Psi_k = k\Psi_k$$

Η δράση του τελεστή δημιουργίας $\alpha^\dagger$ θα αντισταθμίζεται από ισάριθμες δράσεις του τελεστή $\alpha$.

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\Psi_k$.

Άρα η δράση του $\hat{A}$ θα είναι ισοδύναμη με την δράση του τελεστή $f(\hat{N})$ επάνω στις $\Psi_k$

$$\Rightarrow \hat{A} \equiv f(\hat{N})$$

β) Παίρνουμε τυχούσα ιδιοσυνάρτηση των $\alpha$, $\alpha^\dagger$ και $\hat{N}$, την $\Psi_k$.

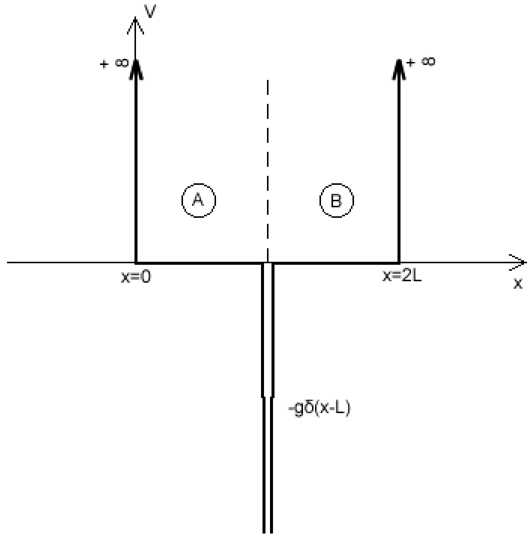
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\alpha^\dagger\Psi_k = \sqrt{k+1}\Psi_{k+1}, \quad \alpha\Psi_k = \sqrt{k}\Psi_{k-1}\\
&\alpha^n(\alpha^\dagger)^n\Psi_k = \alpha^n(\alpha^\dagger)^{n-1}\Psi_{k+1}\sqrt{k+1} =\\
&= \alpha^n(\alpha^\dagger)^{n-2}\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}\Psi_{k+2} =\\
&\vdots\\
&= \alpha^n\sqrt{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}\Psi_{k+n} =\\
&= \sqrt{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}\alpha^{n-1}\sqrt{k+n}\Psi_{k+n-1} =\\
&\vdots\\
&= \sqrt{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}\sqrt{(k+n)(k+n-1)\cdots(k+1)}\Psi_k =\\
&\Rightarrow (\alpha^n)(\alpha^\dagger)^n\Psi_k = (k+1)(k+2)\cdots(k+n)\Psi_k
\end{aligned}$$

για κάθε κυματοσυνάρτηση $\Psi_k$ του αρμονικού ταλαντωτή

$$\Rightarrow \alpha^n(\alpha^\dagger)^n = (N+1)(N+1)\cdots(N+n)$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha^\dagger)^n\alpha^n\Psi_k = (\alpha^\dagger)^n\sqrt{k}\sqrt{k-1}\cdots\sqrt{k-(n-1)}\Psi_{k-n} =\\
&= \sqrt{k(k-1)\cdots(k-(n-1))}\sqrt{(k-n+1)(k-n+2)\cdots(k)}\Psi_{k-n+n}\\
&= k(k-1)\cdots(k-(n-1))\Psi_k\\
&\Rightarrow (\alpha^\dagger)^n\alpha^n = N(N-1)\cdots(N-(n-1))
\end{aligned}$$




Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 5

**Άσκηση 5.**

α) **Λύσεις Αρνητικής Ενέργειας:**

$E = -|E| < 0$

Περιοχή A, $0 \leqslant x < L$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} = E\Psi, \quad \gamma^2 = 2m\frac{|E|}{\hbar^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} = -2m\frac{E}{\hbar^2}\Psi = \gamma^2\Psi \Rightarrow \Psi(x) = e^{\pm\gamma x}$$
$$\Psi_A(0) = 0 \Rightarrow \Psi_A(x) = A\sinh(\gamma x)$$

Περιοχή B, $L < x \leqslant 2L$

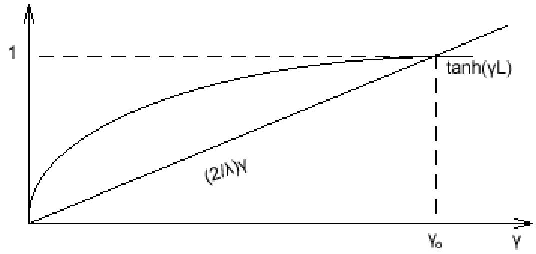
$$\Psi_B(2L) = 0, \Rightarrow \Psi_B(x) = B\sinh(\gamma(x-2L))$$

Η συνέχεια της συνάρτησης μας δίνει

$$\Psi_A(L) = \Psi_B(L) \Rightarrow A\sinh(\gamma L) = B\sinh(-\gamma L)$$
$$\Rightarrow A = -B$$

Η $\Psi(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση του Schrödinger , άρα

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' - g\delta(x-L)\Psi = E\Psi$$




Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση των δυο συναρτήσεων και η γραφική λύση

Ολοκληρώνουμε γύρω από το σημείο της ασυνέχειας

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{L-\epsilon}^{L+\epsilon}\Psi''(x)\mathrm{d}x - g\int_{L-\epsilon}^{L+\epsilon}\delta(x-L)\mathrm{d}x = E\int_{L-\epsilon}^{L+\epsilon}\Psi(x)\mathrm{d}x$$

Το δεξί μέλος τείνει στο μηδέν για $\epsilon \to 0$, άρα

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L+\epsilon} - \left.\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L-\epsilon}\right) = g\Psi(L)$$

Παίρνοντας το όριο $\epsilon \to 0$ από αριστερά έχουμε

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}x}(L) - \frac{\mathrm{d}\Psi_A}{\mathrm{d}x}(L)\right] = g\Psi_A(L)$$

$$\gamma B\cosh(\gamma L) - \gamma A\cosh(\gamma L) = -\frac{2mg}{\hbar^2}A\sinh(\gamma L)$$

Ορίζουμε $\lambda = \dfrac{2mg}{\hbar^2}$ και παίρνουμε την εξίσωση

$$2\gamma\cosh(\gamma L) = \lambda\sinh(\gamma L) \Rightarrow \tanh(\gamma L) = 2\frac{\gamma}{\lambda}$$

Κάνοντας γραφική παράσταση της υπερβολικής εφαπτομένης $\tanh(\gamma L)$ συναρτήσει του $\gamma$, η τομή με την ευθεία $\dfrac{2}{\lambda}\gamma$ δίνει την ενέργεια.
Έχουμε μια μη μηδενική λύση όταν η κλίση της ευθείας είναι μικρότερη από την κλίση της υπερβολικής εφαπτομένης στην αρχή, Δηλαδή:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\tanh(\gamma L)\right|_{\gamma=0} = L$$

και πρέπει να έχουμε $\dfrac{2}{\lambda} < L$

$$\Rightarrow \lambda L > 2$$

Εάν $\lambda L = 2$ έχουμε μια λύση με μηδενική ενέργεια ($\gamma_0 = 0$).
Η εξίσωση του Schrödinger γίνεται

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} - g\delta(x-L)\Psi = 0$$

για $x \neq L$ έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Psi_A(x) = Ax \\ \Psi_B(x) = B(2L-x) \end{cases}$$
$$\Psi_A(L) = \Psi_B(L) \Rightarrow AL = BL \Rightarrow A = B$$

Ολοκλήρωση της εξίσωσης του Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}x}(L) - \frac{\mathrm{d}\Psi_A}{\mathrm{d}x}(L)\right) = g\Psi_A(L)$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2A) = gAL \Rightarrow 2A = \frac{2mg}{\hbar^2}LA$$

$2 = \lambda L$ που ικανοποιείται.

β) **Λύσεις Θετικής Ενέργειας**

$$x \neq L \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} = E\Psi$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$
$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_A(x) = A\sin(kx) & , 0 \leqslant x < L \\ \Psi_B(x) = B\sin(k(x-2L)) & , L < x \leqslant 2L \end{cases}$$

Συνέχεια της συνάρτησης για $x = L$, δίνει

$$A\sin(kL) = B\sin(-kL)$$

Εάν $\sin(kL) \neq 0 \Rightarrow A = -B$
Ολοκληρώνοντας την εξίσωση του Schrödinger έχουμε

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}x}(L) - \frac{\mathrm{d}\Psi_A}{\mathrm{d}x}(L)\right) = g\Psi_A(L)$$
$$2k\cos(kL) = \frac{2mg}{\hbar^2}\sin(kL) = \lambda\sin(kL)$$
$$\Rightarrow \tan(kL) = \frac{2}{\lambda}k$$

Η λύση είναι πάλι γραφική από την τομή της εφαπτομένης $\tan(kL)$ με την ευθεία $\frac{2}{\lambda}k$.
Για $\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{2L}n$
με ενέργεια $E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \frac{4\pi^2}{(2L)^2}\frac{\hbar^2}{2m^2}n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$
Ολοκληρώνοντας την εξίσωση του Schrödinger βρίσκουμε $A = B$. ∎

---

**Άσκηση 6.**

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' - \frac{g}{x}\Psi = E\Psi, \quad E < 0 \\
&\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + \left(E + \frac{g}{x}\right)\Psi = 0, \quad E = -|E|
\end{aligned}
$$

Διαστατική ανάλυση:
Το $g$ έχει διαστάσεις Joules·Length ,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\hbar^2}{m} = \frac{\text{Joule}^2 \cdot \text{sec}^2}{\text{kgr}} = \frac{\text{Joule} \cdot \text{sec}^2}{\text{kgr}}\text{kgr}\left(\frac{\text{Length}}{\text{sec}}\right)^2 \\
&\frac{\hbar^2}{m} = \text{Joule} \cdot (\text{Length})^2, \quad \alpha = \frac{m}{\hbar^2}g = \frac{\text{Joule} \cdot \text{Length}}{\text{Joule} \cdot (\text{Length})^2} = \frac{1}{\text{Length}}
\end{aligned}
$$

$$
\alpha = \frac{mg}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad \xi = \alpha x
$$

που είναι αδιάστατο
Η εξίσωση του Schrödinger γίνεται:

$$
\begin{aligned}
&\Psi'' + \left(2\frac{mE}{\hbar^2} + \frac{mg}{\hbar^2}\frac{2}{x}\right)\Psi = 0 \\
&\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \alpha\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\right) = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\right) = \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} \\
&\Rightarrow \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(2\frac{mE}{\hbar^2} + \frac{2\alpha}{\frac{\xi}{\alpha}}\right)\Psi = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(2\frac{mE}{\hbar^2\alpha^2} + \frac{2}{\xi}\right)\Psi = 0 \\
&\gamma^2 = \frac{2\hbar^2|E|}{mg^2}
\end{aligned}
$$

$\frac{m|E|}{\hbar^2}\frac{1}{\alpha^2} = \frac{m|E|}{\hbar^2}\frac{h^4}{m^2g^2} = \frac{\hbar^2|E|}{mg^2}$ = αδιάστατο.
Άρα η εξίσωση του Schrödinger στις νέες μεταβλητές είναι

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(-\gamma^2 + \frac{2}{\xi}\right)\Psi = 0$$

Παίρνουμε πρώτα την ασυμπτωτική εξίσωση για $\xi \to \infty$

$$\Rightarrow \Psi'' - \gamma^2\Psi = 0 \Rightarrow \Psi'' = \gamma^2\Psi \Rightarrow \Psi(\xi) = e^{-\gamma\xi}$$

Για κάθε $\xi$ έχουμε την λύση

$$\begin{aligned}
&\Psi(\xi) = e^{-\gamma\xi}F(\xi)\\
&\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi} = -\gamma e^{-\gamma\xi}F(\xi) + e^{-\gamma\xi}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}\\
&\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} = \gamma^2 e^{-\gamma\xi}F(\xi) - \gamma e^{-\gamma\xi}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} - \gamma e^{-\gamma\xi}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} + e^{-\gamma\xi}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\xi^2}\\
&\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} = \left(\gamma^2F - 2\gamma\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\xi^2}\right)e^{-\gamma\xi}
\end{aligned}$$

Η εξίσωση του Schrödinger ξανά:

$$\begin{aligned}
&\left(\gamma^2F - 2\gamma F' + F''\right) - \gamma^2F + \frac{2F}{\xi} = 0\\
&F'' - 2\gamma F' + \frac{2}{\xi}F = 0
\end{aligned}$$

Λύση με σειρά:

$$\begin{aligned}
&F(\xi) = \xi\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\xi^k\\
&F(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\xi^k
\end{aligned}$$

όπου ξεκινάμε με τον γραμμικό όρο διότι θέλουμε $F(\xi = 0) = 0$. Έτσι

$$\begin{aligned}
&F' = \sum_{k=1}^{\infty}k\beta_k\xi^{k-1}, \quad \frac{F}{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\xi^{k-1}\\
&F'' = \sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)\beta_k\xi^{k-2}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\beta_k \xi^{k-2} - 2\gamma \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k \xi^{k-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^{k-1} = 0$$

Αναδιατάσουμε τις σειρές για να έχουμε ίδιες δυνάμεις

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+1)\beta_{l+2}\xi^l - 2\gamma \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\beta_{l+1}\xi^l + 2\sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l+1}\xi^l = 0$$

όπου για την πρώτη σειρά έχουμε κάνει τον μετασχηματισμό $k = l+2, l = 0 \rightarrowtail k = 2$, για την δεύτερη σειρά τον $k = l+1, l = 0 \rightarrowtail k = 1$ και για την τρίτη $k = l+1, l = 0 \rightarrowtail k = 1$.
Κρατάμε τους ομοβάθμιους όρους:

$$(l+2)(l+1)\beta_{l+2} - 2\gamma(l+1)\beta_{l+1} + 2\beta_{l+1} = 0$$
$$\beta_{l+2} = \frac{2\gamma(l+1)-2}{(l+2)(l+1)}\beta_{l+1}, \quad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ορίζοντας $k = l+1$ έχουμε

$$\beta_{k+1} = 2\frac{\gamma k - 1}{(k+1)k}\beta_k, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Η σειρά τερματίζεται όταν $\gamma = \dfrac{1}{n}$, $n =$ακέραιος και για κάθε $n$ η λύση είναι πολυώνυμο βαθμού $n$.
Ενέργειες:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2\hbar^2 |E|}{mg^2}$$
$$\Rightarrow E_n = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

---

**Άσκηση 8.**

Πρώτον, αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του $x^2$:

$$V(x) = \left(1 + \lambda x^2 + \frac{\lambda^2 x^4}{2} + \frac{\lambda^3 x^6}{3!} + \cdots\right) V_0$$

Δεύτερον, κρατώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους λύνουμε την εξίσωση του Schrödinger για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} + V_0\lambda x^2\Psi = (E_n - V_0)\Psi \\
&V_0\lambda = \frac{1}{2}m\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2V_0\lambda}{m} \\
&\omega = \sqrt{\frac{2V_0}{m}}\sqrt{\lambda}
\end{aligned}
$$

Οι λύσεις είναι:

$$
\begin{aligned}
&E_n^{(0)} - V_0 = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&E_n^{(0)} = V_0 + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

και ιδιοσυναρτήσεις $\Psi_n$ αυτές του αρμονικού ταλαντωτή.
Τρίτον, αντιμετωπίζουμε τον όρο $V(x) = \frac{\lambda^2}{2}x^4V_0$ σαν διαταραχή και υπολογίζουμε τις διορθώσεις στην ενέργεια $E_n$.
Εφαρμόζουμε λοιπόν πρώτης τάξης θεωρία διαταραχών:

$$
\begin{aligned}
&W_n = \langle\Psi_n|V(x)|\Psi_n\rangle = V_{nn} \\
&V_{nn} = \langle\Psi_n|V_0\frac{\lambda^2}{2}x^4|\Psi_n\rangle = \frac{V_0}{2}\lambda^2\langle\Psi_n|x^4|\Psi_n\rangle \\
&\langle\Psi_n|x^4|\Psi_n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_n x^4\Psi_n\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}(x^2\Psi_n)(x^2\Psi_n)\mathrm{d}x \\
&x^2\left|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{n(n-1)}\Psi_{n-2} + (2n+1)\Psi_n + \sqrt{(n+1)(n+2)}\Psi_{n+2}\right) \\
&\langle n|x^4|n\rangle = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}\left(n(n-1) + (2n+1) + (n+1)(n+2)\right) \\
&\langle n|x^4|n\rangle = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}\left(2(n^2+2n+2)\right) \\
&W_n = V_{nn} = \frac{V_0}{2}\lambda^2\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}2(n^2+2n+2) \\
&V_{nn} = \frac{\lambda\hbar^2}{8m}(n^2+2n+2)
\end{aligned}
$$

$$
E_n = E_n^{(0)} + V_{nn} = V_0 + \sqrt{2V_0}\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\hbar + \frac{1}{8}(n^2+2n+2)\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\hbar\right)^2
$$

Για μικρό $n$ η διόρθωση πάει με τις δυνάμεις του $\hbar\sqrt{\frac{\lambda}{m}} < \sqrt{V_0}$ όπως υποθέτουμε. Για μεγάλα $n$ πάει με το $n^2$ και γίνεται αναξιόπιστη η προσέγγιση. ■

---

## Άσκηση 9.

α)

$$\Psi_n(x,y) = \Psi_{n_1}(x)\Psi_{n_2}(y)$$
$$E_n = E_{n_1} + E_{n_2}$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_{n_1}}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\Psi_{n_1} = E_{n_1}\Psi_{n_1}$$
$$E_{n_1} = \hbar\omega\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)$$
$$E_{n_2} = \hbar\omega\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$E_n = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) = \hbar\omega(n+1)$$
$$n = n_1 + n_2, \quad n_1 = 0,1,2,\ldots, \quad n_2 = 0,1,2,\ldots$$
$$\Rightarrow n = 0,1,2,\ldots$$

Για την ενέργεια $E_0 = \hbar\omega$ έχουμε μόνο μια ιδιοσυνάρτηση, την $\Psi_0(x,y) = \Psi_0(x)\Psi_0(y)$. Για την ενέργεια $E_1 = 2\hbar\omega$ έχουμε δυο ιδιοσυναρτήσεις, τις

$$\begin{cases} \Psi_{10}(x,y) = \Psi_1(x)\Psi_0(y) = \Phi_1 \\ \Psi_{01}(x,y) = \Psi_0(x)\Psi_1(y) = \Phi_2 \end{cases}$$

δηλαδή έχουμε εκφυλισμό.
Για ορισμένο $n$ με ενέργεια $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n+1)$ το $n_1$ μπορεί να πάρει τις τιμές $n_1 = 0,1,2,\ldots,n$ δηλαδή έχουμε $n+1$ διαφορετικές καταστάσεις με την ίδια ενέργεια. ■

β) Ιδιοτιμές της ενέργειας

$$V_{11} = \langle\Phi_1|V|\Phi_1\rangle \int \Psi_1^*(x)\Psi_0^*(y)cxy\Psi_1(x)\Psi_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$V_{11} = 0, \quad V_{22} = 0$$
$$V_{12} = \langle\Phi_1|V|\Phi_2\rangle = c\int \Psi_1^*(x)\Psi_0^*(y)xy\Psi_0(x)\Psi_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= c\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1 x\Psi_0\mathrm{d}x\right)^2 = c\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1(x)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Psi_1(x)\mathrm{d}x\right)^2 =$$
$$= c\frac{\hbar}{2m\omega} = V_{21}$$
$$x\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Psi_1$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2\hbar\omega - E_1 & \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ \frac{c\hbar}{2m\omega} & 2\hbar\omega - E_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(2\hbar\omega - E_1)^2 - \frac{c^2\hbar^2}{4m^2\omega^2} = 0 \Rightarrow \left(2\hbar\omega - E_1 - \frac{c\hbar}{2m\omega}\right)\left(2\hbar\omega - E_1 + \frac{c\hbar}{2m\omega}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1^{(+)} = 2\hbar\omega + \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ E_1^{(-)} = 2\hbar\omega - \frac{c\hbar}{2m\omega} \end{cases}$$

$$\Phi^{(+)} = c_1^{(+)}\Phi_1 + c_2^{(+)}\Phi_2, \quad E_1^{(+)} = E_1^{(0)} + W$$
$$\Phi^{(-)} = c_1^{(-)}\Phi_1 + c_2^{(-)}\Phi_2, \quad E_1^{(-)} = E_1^{(0)} - W$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ \frac{c\hbar}{2m\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(+)} \\ c_2^{(+)} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} c_1^{(+)} \\ c_2^{(+)} \end{pmatrix}, \quad W = \frac{c\hbar}{2m\omega}$$
$$\Rightarrow \frac{c\hbar}{2m\omega} c_2^{(+)} = \frac{c\hbar}{2m\omega} c_1^{(+)} \Rightarrow c_1^{(+)} = c_2^{(+)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ \frac{c\hbar}{2m\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(-)} \\ c_2^{(-)} \end{pmatrix} = -W \begin{pmatrix} c_1^{(-)} \\ c_2^{(-)} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow c_1^{(-)} = -c_2^{(-)}$$

Και με κανονικοποίηση $|c_1| = |c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, έτσι

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + \Phi_2) \quad \text{Συμμετρική Λύση} \\ \\ \Phi^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - \Phi_2) \quad \text{Αντισυμμετρική Λύση} \end{cases}$$

■

γ)

$$xy = (v+z)(v-z) = v^2 - z^2$$
$$x^2 + y^2 = v^2 + z^2 + 2vz + v^2 + z^2 - 2vz = 2v^2 + 2z^2$$
$$\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + cxy = m\omega^2 v^2 + m\omega^2 z^2 + cv^2 - cz^2 =$$
$$= (m\omega^2 + c)v^2 + (m\omega^2 - c)z^2$$

$$
\begin{aligned}
&v=\frac{1}{2}(x+y), \quad z=\frac{1}{2}(x-y)\\
&\frac{\partial \Psi}{\partial x}=\frac{\partial \Psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\\
&\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial v}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial z}2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\\
&=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial v}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial z}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Psi}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\\
&\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial v}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial z}2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\\
&=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial v}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial z}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}
$$

Η εξίσωση του Schrödinger στις νέες μεταβλητές είναι

$$
H=-\frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+(m\omega^2+c)v^2+(m\omega^2-c)z^2
$$

όπου $m\omega^2-c>0$.
Ξαναορίζοντας τις μεταβλητές

$$
v \rightarrow \sqrt{2}v=w, \quad z \rightarrow \sqrt{2}z=u
$$

η Χαμιλτονιανή γίνεται

$$
H=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial w^2}+\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right)+\frac{1}{2}(m\omega^2+c)w^2+\frac{1}{2}(m\omega^2-c)u^2
$$

με ιδιοτιμές της ενέργειας:

$$
\left\{\begin{array}{l}
E_{n_1}=\hbar\omega_1\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\\
E_{n_2}=\hbar\omega_2\left(n_2+\frac{1}{2}\right)
\end{array}\right.
$$

όπου

$$m\omega_1^2 = m\omega^2 + c \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \frac{c}{m}}$$
$$m\omega_2^2 = m\omega^2 - c \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\omega^2 - \frac{c}{m}}$$

Τελικά οι κυματοσυναρτήσεις είναι:

$$\Psi_{n_1,n_2}(x,y) = \Psi_{n_1}(w)\Psi_{n_2}(u)$$
$$\Psi_{n_1}(w) = \left(\frac{\alpha_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2^{-n_1}}{n_1!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha_1 \frac{w^2}{2}} H_{n_1}\left(\sqrt{\alpha_1} w\right)$$
$$\alpha_1 = \frac{m\omega_1}{\hbar}$$
$$\Psi_{n_2}(u) = \left(\frac{\alpha_2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2^{-n_2}}{n_2!}\right) e^{-\alpha_2 \frac{u^2}{2}} H_{n_2}\left(\sqrt{\alpha_2} u\right)$$
$$\alpha_2 = \frac{m\omega_2}{\hbar}$$

με ολική ενέργεια $E_{n_1,n_2} = E_{n_1} + E_{n_2}$ ■

---

**Άσκηση 10.**

**Πρώτον** Υποθέτω ότι λύνω την αδιατάρακτη Χαμιλτονιανή $H_0$ και έχω τα $E_0$ και $\Psi_1^{(0)}, \Psi_2^{(0)}$.

**Δεύτερον** διαγωνοποιώ τον πίνακα $V_{\eta\lambda}$ της διαταραχής και βρίσκω τις δυο ιδιοτιμές της ενέργειας

$$E_1 = E_0 + E^{(1)}, \quad E_2 = E_0 + E^{(2)}$$

**Τρίτον** βρίσκω για κάθε ιδιοτιμή $E_1$, $E_2$ τα ιδιοδιανύσματα $\Psi_k$ με $k = 1,2$

$$(H_0 + V)\Psi_k = E_k \Psi_k$$
$$H_0 \Psi_k = E_0 \Psi_k$$

$$\Psi_1 = c_{11}\Psi_1^{(0)} + c_{12}\Psi_2^{(0)}$$
$$\Psi_2 = c_{21}\Psi_1^{(0)} + c_{22}\Psi_2^{(0)}$$

**Τέταρτον** λύνω ως προς $\Psi_1^{(0)}$

$$\Psi_1^{(0)} = \frac{c_{22}\Psi_1 - c_{12}\Psi_2}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

$$\Psi(t=0) = \Psi_1^{(0)}, \quad \Psi(t) = \frac{c_{22}\Psi_1 e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} - c_{12}\Psi_2 e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \frac{e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}} \left( c_{22}\Psi_1 e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - c_{12}\Psi_2 e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right)$$

αντικαθιστώντας όπου $\Psi_1$, $\Psi_2$ τις εκφράσεις τους ως προς $\Psi_1^{(0)}$, $\Psi_2^{(0)}$ έχουμε

$$\Psi(t) = \frac{e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}} \left( \Psi_1^{(0)} \left( c_{11}c_{22} e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - c_{12}c_{21} e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) + \Psi_2^{(0)} c_{12}c_{22} \left( e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) \right)$$

Επιβεβαίωση:

$$t = 0 \Rightarrow \Psi(t=0) = \frac{1}{\det|c|} \Psi_1^{(0)} \det|c| = \Psi_1^{(0)}$$

Πιθανότητα μετάβασης στην $\Psi_2^{(0)}$ σε χρόνο $(t) = \left| \langle \Psi_2^{(0)} | \Psi(t) \rangle \right|^2 =$

$$= \frac{(c_{12}c_{22})^*(c_{12}c_{22})}{|c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}|^2} \left( e^{i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - e^{i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) \left( e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) =$$

$$\frac{|c_{12}|^2 |c_{22}|^2}{|c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}|^2} \left( 2 - 2\cos\left( \frac{E^{(1)} - E^{(2)}}{\hbar} t \right) \right)$$

---

### Άσκηση 11.

Το δυναμικό που προστίθεται στο σύστημα είναι της μορφής $V(x,t) = -q\mathscr{E}(t)x$
Άρα το πλάτος πιθανότητας $\alpha_{n\to m}$ σε πρώτης τάξης διαταρακτική προσέγγιση είναι:

$$\alpha_m(t) = \alpha_{n\to m}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} V_{mn}(t') e^{iW_{mn}t'} \mathrm{d}t'$$

$$W_{mn} = \frac{1}{\hbar}(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) = \frac{1}{\hbar}\hbar\omega \left( m + \frac{1}{2} - n - \frac{1}{2} \right)$$

$$W_{mn} = \omega(m-n)$$

$$V_{mn}(t) = -q\mathscr{E}(t)\langle m|x|n\rangle = -qe^{-\lambda t^2}\langle m|x|n\rangle$$

για τον αρμονικό ταλαντωτή έχουμε:

$$x\Psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1})$$

άρα

$$m = \begin{cases} n-1 \\ n+1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \langle m|x|n\rangle = \begin{cases} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} & , m = n-1 \\ \sqrt{n+1}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} & , m = n+1 \end{cases}$$

Εάν πάρουμε $t \to \infty$ έχουμε:

$$\alpha_{n\to n+1} = \frac{iq}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2}e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$
$$\alpha_{n\to n-1} = \frac{iq}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2}e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda}}$$

και Πλάτος μετάβασης$= |\alpha_m|^2$ ■

---

**Άσκηση 12.**

Ολική δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - Fx$$
$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(x-x_0)^2 + V_0$$
$$x_0 = \frac{F}{m\omega^2}, \quad V_0 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{m\omega^2}$$

ορίζουμε $y = x - x_0$
άρα οι κυματοσυναρτήσεις του διαταραγμένου συστήματος είναι

$$\Psi_k(y) = \Psi_k(x - x_0)$$

με $\Psi_k$ τις λύσεις του ταλαντωτή, $\Psi_k(x) = c_kH_k(\sqrt{a}x)e^{-\frac{ax^2}{2}}$, $a = \frac{m\omega}{\hbar}$.
Άρα το πλάτος μετάβασης είναι:

$$\alpha_{0\to k} = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_0(x)\Psi_k(x-x_0)\mathrm{d}x$$

κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής

$$
\begin{aligned}
&y = x - x_0, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x, \quad x = y + x_0 \\
&\alpha_{0\to k} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(y + x_0)\Psi_k(y)\mathrm{d}y = \\
&= c_0 c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\frac{(y+x_0)^2}{2}} e^{-a\frac{y^2}{2}} H_k(\sqrt{a}y)\mathrm{d}y = \\
&= c_0 c_k e^{-a\frac{x_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_0 y} e^{-ay^2} H_k(\sqrt{a}y)\mathrm{d}y = \\
&= \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} e^{-a\frac{x_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{a}x_0\xi} e^{-\xi^2} H_k(\xi)\mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} e^{-a\frac{x_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\sqrt{a}x_0\xi} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi \\
&\xi = \sqrt{a}y, \quad \xi_0 = \sqrt{a}x_0, \quad H_k(\xi) = (-1)^k e^{\xi^2} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} e^{-\xi^2}
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_{0\to k} = (-1)^k \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} e \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_0\xi} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi
$$

Το ολοκλήρωμα επιλύεται κάνοντας ολοκλήρωση κατά μέρη $k$ φορές.

$$
c_0 = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad c_k = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \Rightarrow \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^k k!}}
$$