Κβαντομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΦΕ

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Η ενέργεια κλασικά για αυτό το σωματίδιο είναι

$$E = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$I =$ροπή αδράνειας$= MR^2$

$$L = mVR = mR^2\frac{V}{R} = I\omega$$
$$E = \frac{1}{2}\frac{I^2\omega^2}{I} = \frac{\vec{L}^2}{2I}$$

Άρα η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\vec{l}^2$$

όπου $\vec{l}^2$ ο τελεστής της στροφορμής του σωματιδίου με ιδιοσυναρτήσεις τις σφαιρικές αρμονικές Y_{lm}
Έχουμε

$$\vec{l}^2 Y_{lm} = \hbar^2(l+1)lY_{lm}$$
$$\Rightarrow \hat{H}Y_{lm} = \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1)Y_{lm}$$
$$\Rightarrow E_l = \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1)$$

είναι οι δυνατές τιμές της ενέργειας με εκφυλισμό τάξεως $2l+1$. ■

Άσκηση 2.

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{(I\omega)^2}{I} = \frac{L_z^2}{2I}$$

διότι η στροφορμή του σωματιδίου είναι επάνω στον άξονα των z μόνο.

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{L}_z^2}{2I}, \quad \hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

με ιδιοτιμές

$$\hat{L}_z\Psi = \lambda\Psi$$
$$\Rightarrow -i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = \lambda\Psi \Rightarrow \Psi(\phi) = Ne^{i\frac{\lambda}{\hbar}\phi}$$

για να έχουμε μονοτιμία $\Rightarrow \dfrac{\lambda}{\hbar} = m, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ ακέραιος.

$$\Rightarrow \lambda = \hbar m, \Psi_m(\phi) = Ne^{im\phi}$$
$$\hat{H}\Psi_m(\phi) = \frac{\hbar^2}{2I}m^2\Psi_m(\phi) \Rightarrow E_m = \frac{\hbar^2}{2I}m^2$$

Εκφυλισμός 2 για $|m| \neq 0$.

Απόδειξη της σχέσης μεταξύ $\hat{H}$ και $\vec{L}^2$

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad \vec{p} = -i\hbar\nabla$$
$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

στο *πρώτο πρόβλημα* έχουμε $r = R$ σταθερό

$$\Rightarrow \nabla^2 = \frac{1}{R^2}\left(f(\theta,\phi)\right)$$

ο τελεστής της στροφορμής στο τετράγωνο σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$
$$\Rightarrow -\hbar^2\nabla^2 = \frac{\vec{L}^2}{R^2} \Rightarrow \hat{H} = \frac{\vec{L}^2}{2mR^2} = \frac{\vec{L}^2}{2I}$$

στο *δεύτερο πρόβλημα* έχουμε ακόμη $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ =σταθερό

$$\Rightarrow \sin\theta = 1$$
$$\Rightarrow \vec{L}^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} = L_z^2$$
$$\hat{H} = \frac{L_z^2}{2mR^2} = \frac{L_z^2}{2I}$$
$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 3.

Έχουμε $L_z\Psi = \lambda\Psi$ με λ πραγματικό.
Ακόμη

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad \lambda = \lambda^*$$
$$\Rightarrow \langle L_x\rangle = \int \Psi^* \hat{L}_x \Psi \mathrm{d}^3x = i\hbar \int \Psi^* \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] \Psi \mathrm{d}^3x =$$
$$= i\hbar \left(\int \Psi^* L_y L_z \Psi \mathrm{d}^3x - \int \Psi^* L_z L_y \Psi \mathrm{d}^3x \right) =$$
$$= i\hbar \left(\lambda \int \Psi^* L_y \Psi \mathrm{d}^3x - \int (L_z\Psi)^* L_y \Psi \mathrm{d}^3x \right) =$$
$$= i\hbar \left(\lambda\langle L_y\rangle - \lambda^*\langle L_y\rangle\right) = i\hbar\lambda \left(\langle L_y\rangle - \langle L_y\rangle\right) = 0 \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 4.

$\hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$ και $H\Psi = E\Psi$ και

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} f(\theta, \phi)$$
$$f(\theta,\phi) = -\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2}$$

παίρνωντας τις κυματοσυναρτήσεις $\Psi(r,\theta,\phi) = \Psi(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ έχουμε $f(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta,\phi) = -\dfrac{1}{\hbar^2}\vec{L}^2 Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}$ διότι $\vec{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}$

$$\Rightarrow \hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\Psi + V(r)\Psi$$

για $l = 0$ ο όρος της στροφορμής μηδενίζεται.
Ενώ $V(r) = 0$ για $0 \leqslant r \leq \alpha$.
Ακόμη θέτοντας $\Psi(r) = \dfrac{U(r)}{r}$ έχουμε

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{U}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$$
$$r^2\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -U + r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} + r\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} = r\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}$$
$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{r}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}$$

για $0 \leqslant r \leq \alpha$
Με την συνθήκη $U(r) \to 0$ για $r \to 0$ η χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger είναι:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} = E\Psi = E\frac{U}{r} \\
&\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} = EU
\end{aligned}
$$

με $0 \leqslant r \leq \alpha$, $U(0) = 0$ και $U(\alpha) = 0$.
Άρα έχουμε την περίπτωση ενός απειρόβαθου πηγαδιού.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}U = -k^2U \\
&U(r) = A\sin(kr) + B\cos(kr) \\
&U(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\
&U(\alpha) = 0 \Rightarrow \sin(k\alpha) = 0 \Rightarrow k\alpha = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \\
&k = \frac{n\pi}{\alpha} \\
&E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{\alpha^2}n^2 \\
&\Psi_n(r) = \frac{A_n}{r}\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}r\right)
\end{aligned}
$$

Κανονικοποίηση:

$$
\begin{aligned}
&\int \Psi^*(r,\theta,\phi)\Psi(r,\theta,\phi)r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 1 \\
&\Rightarrow 4\pi A_n^2\int_0^\alpha \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{\alpha}r\right)}{r^2}r^2\mathrm{d}r = 1 \\
&\Rightarrow 4\pi A_n^2\int_0^\alpha \sin^2\left(n\frac{\pi}{\alpha}r\right)\mathrm{d}r = 1 \\
&4\pi A_n^2\frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}} = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Άσκηση 5.

$$
\begin{aligned}
&(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = (\sigma_1A_1 + \sigma_2A_2 + \sigma_3A_3)(\sigma_1B_1 + \sigma_2B_2 + \sigma_3B_3) \\
&= \sigma_1^2A_1B_1 + \sigma_2^2A_2B_2 + \sigma_3^2A_3B_3 + \sigma_1\sigma_2A_1B_2 + \sigma_1\sigma_3A_1B_3 + \sigma_2\sigma_1A_2B_1 \\
&\qquad + \sigma_2\sigma_3A_2B_3 + \sigma_3\sigma_1A_3B_1 + \sigma_3\sigma_2A_3B_2 \\
&= \vec{A}\cdot\vec{B} + i\sigma_3(A_1B_2 - A_2B_1) + i\sigma_1(A_2B_2 - A_3B_2) + i\sigma_2(A_3B_1 - A_1B_3) \\
&= \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})
\end{aligned}
$$

διότι έχουμε τις ιδιοτιμές των σ πινάκων

$$\sigma_k^2 = 1, \quad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$$

ή αλλιώς

$$\sigma_k\sigma_l = i\epsilon_{klm}\sigma_m + \delta_{kl}$$
$$(\vec{A} \times \vec{B}) = \epsilon_{jkl}A_jB_k\hat{l} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 6.

α)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}\gamma} = iJ_ye^{i\gamma J_y}J_ze^{-i\gamma J_y} - ie^{i\gamma J_y}J_zJ_ye^{-i\gamma J_y}$$
$$= ie^{i\gamma J_y}\left[J_y, J_z\right]e^{-i\gamma J_y}$$
$$= -\hbar e^{i\gamma J_y}J_xe^{-i\gamma J_y}$$
$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_x, J_y] = i\hbar J_z$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{A}}{\mathrm{d}\gamma^2} = -i\hbar e^{i\gamma J_y}J_yJ_xe^{-i\gamma J_y} + i\hbar e^{i\gamma J_y}J_xJ_ye^{i\gamma J_y}$$
$$= i\hbar e^{i\gamma J_y}\left[J_x, J_y\right]e^{-i\gamma J_y}$$
$$= -\hbar^2e^{i\gamma J_y}J_ze^{-i\gamma J_y}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\hat{A}}{\mathrm{d}\gamma^2} = -\hbar^2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}_1\cos(\gamma\hbar) + \hat{C}_2\sin(\gamma\hbar)$$
$$\gamma = 0 \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}_1 = J_z$$
$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}\gamma} = -\hbar\hat{C}_1\sin(\gamma\hbar) + \hbar\hat{C}_2\cos(\gamma\hbar)$$
$$\gamma = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}\gamma} = \hbar\hat{C}_2 = -\hbar J_x$$
$$\Rightarrow \hat{C}_2 = -J_x$$
$$\hat{A} = \hat{J}_z\cos(\gamma\hbar) - \hat{J}_x\sin(\gamma\hbar)$$

β)

$$\vec{J}^2\left(e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}J_y}Y_{lm}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}J_y}J^2Y_{lm} =$$
$$\hbar^2l(l+1)\left(e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}J_y}Y_{lm}\right)$$

διότι $\left[\vec{J}^2, J_y\right] = 0$

$$J_x\left(e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}J_y}Y_{lm}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}J_y}J_z e^{i\frac{\pi}{2\hbar}J_y}e^{-i\frac{\pi}{\hbar}J_y}Y_{lm}$$
$$e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}J_y}J_z Y_{lm} = \hbar m\left(e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}J_y}Y_{lm}\right)$$

διότι $e^{i\lambda J_y}e^{-i\lambda J_y} = 1$, λ =πραγματικό και $\hat{A}(\gamma = -\frac{\pi}{2\hbar}) = -\hat{J}_x \sin\left(-\frac{\pi\hbar}{2\hbar}\right) = \hat{J}_x$

Σημείωση: Άλλος τρόπος απόδειξης του α) είναι να αναπτύξω σε σειρά $e^{\pm\gamma J_y}$ και να κρατήσω τις δυνάμεις του γ χωριστά για άρτιες και περιττές δυνάμεις. ■

Άσκηση 7.

α) Έστω το διάνυσμα $\hat{n}$ ξατά την κατεύθυνση (θ, ϕ), μοναδιαίο διάνυσμα

$$\Rightarrow \hat{n} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta$$
$$S_n = \vec{S}\cdot\hat{n} = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z$$
$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}$$
$$S_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

β) Ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$$
$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = -(\cos^2\theta - \lambda^2) - \sin^2\theta = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

γ)

$$S_n\mathcal{X}_+^{(n)} = \frac{\hbar}{2}\mathcal{X}_+^{(n)}$$
$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta e^{-i\phi} = \alpha \\ \alpha\sin\theta e^{i\phi} - \beta\cos\theta = \beta \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$\alpha(1-\cos\theta) = \beta\sin\theta e^{-i\phi}$$
$$2\alpha\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\beta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}$$
$$\Rightarrow \alpha\sin\frac{\theta}{2} = \beta\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}$$

Την ίδια εξίσωση παίρνουμε και από την δεύτερη εξίσωση.
Άρα διαλέγοντας $\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$ και $\beta = \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}$ βλέπουμε ότι $\alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 1$

$$\Rightarrow \mathcal{X}_+^{(n)} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Ομοίως:

$$\mathcal{X}_-^{(n)} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

με ιδιοτιμή $-\frac{\hbar}{2}$. Προφανώς ισχύει $\mathcal{X}_-^{(n)}\mathcal{X}_+^{(n)} = 1$ ■

Άσκηση 8.

α) Παίρνουμε τον τελεστή S_n που παριστάνει την προβολή του spin στην κατεύθυνση (θ, ϕ) και έχουμε

$$\langle S_n \rangle = \mathcal{X}^+ S_n \mathcal{X} = \frac{\hbar}{2}(1 \quad 0)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\hbar}{2}(1 \quad 0)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$$

β) Εάν $P_+(\theta)$ είναι η πιθανότητα να βρούμε το spin πάνω $\left(+\frac{\hbar}{2}\right)$ και $P_-(\theta)$ η πιθανότητα να βρούμε το spin κάτω $\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$ σε μια μέτρηση κατά τον άξονα $\hat{n}$ ισχύει

$$\Rightarrow \langle S_n \rangle = \frac{\hbar}{2}P_+(\theta) + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)P_-(\theta)$$

Επίσης ισχύει προφανώς $P_+(\theta) + P_-(\theta) = 1$

$$\Rightarrow P_-(\theta) = 1 - P_+(\theta)$$
$$\Rightarrow \langle S_n \rangle = \frac{\hbar}{2} P_+(\theta) - \frac{\hbar}{2}(1 - P_+(\theta)) =$$
$$= \hbar P_+(\theta) - \frac{\hbar}{2}$$
$$\Rightarrow P_+(\theta) = \frac{1}{\hbar}\left(\langle S_n \rangle + \frac{\hbar}{2}\right)$$
$$\Rightarrow P_+(\theta) = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{2}\cos\theta + \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2}$$
$$\Rightarrow P_+(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow P_-(\theta) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Άλλος τρόπος λύσης

$$|\mathcal{X}_+^{(z)}\rangle = |\mathcal{X}_+^{(n)}\rangle\langle\mathcal{X}_+^{(n)}|\mathcal{X}_+^{(z)}\rangle + |\mathcal{X}_-^{(n)}\rangle\langle\mathcal{X}_-^{(n)}|\mathcal{X}_+^{(z)}\rangle$$
$$P_+(\theta) = \left|\langle\mathcal{X}_+^{(n)}|\mathcal{X}_+^{(z)}\rangle\right|^2$$
$$P_-(\theta) = \left|\langle\mathcal{X}_-^{(n)}|\mathcal{X}_+^{(z)}\rangle\right|^2$$
$$\langle\mathcal{X}_+^{(n)}|\mathcal{X}_+^{(z)}\rangle = (\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}) \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\langle\mathcal{X}_-^{(n)}|\mathcal{X}_+^{(z)}\rangle = (\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}) \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της άσκησης 7. ■