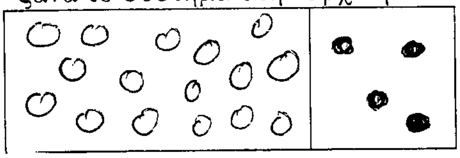
μέχρι 5/11/04

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (1) 22/10/2004

1) Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από δύο σωματίδια με σπιν ½ και με μαγνητική ροπή μ_0 το καθένα (σύστημα A), και από ένα δεύτερο σύστημα, A', που αποτελείται από τρία σωματίδια με σπιν ½ και με μαγνητική ροπή μ_0 το καθένα. Τα δύο συστήματα τοποθετούνται σε μαγνητικό πεδίο **B**. (α) Να απαριθμήσετε όλες τις προσιτές καταστάσεις του συστήματος $A^* = (A + A')$. Για κάθε μία από αυτές να βρείτε την ολική μαγνήτιση και την ολική ενέργεια. (β) Τα συστήματα A και A' αρχικά δεν βρίσκονται σε επαφή. Η μαγνητική ροπή του A είναι $M = -2\mu_0$, ενώ η μαγνητική ροπή του A' είναι $M' = +3\mu_0$. Τα συστήματα έρχονται κατόπιν σε επαφή, ώστε να μπορούν να ανταλλάσσουν ενέργεια ελεύθερα, είναι απομονωμένα από το περιβάλλον και φθάνουν στην κατάσταση ισορροπίας. Να υπολογίσετε (i) τις πιθανότητες $P(M)$ και $P(M')$ για να πάρουν οι ολικές μαγνητικές ροπές των A και A' μία από τις δυνατές τους τιμές M και M' αντιστοίχως, (ii) τη μέση τιμή του M, $\langle M \rangle$ και (iii) τις τιμές της πιθανότητας $P(M)$ και της μέσης τιμής $\langle M \rangle$ στην περίπτωση που τα συστήματα χωρίζονται ξανά, ώστε να μην είναι πια ελεύθερα να ανταλλάξουν ενέργεια μεταξύ τους.

2) Ένα δοχείο διαχωρίζεται από ένα πέτασμα με λόγο 4 προς 1. Το μεγαλύτερο μέρος περιέχει 1000 μόρια αερίου Ne και το μικρότερο 100 μόρια αερίου He. Στο πέτασμα κατόπιν ανοίγεται μία μικρή τρύπα. Περιμένουμε να επέλθει ισορροπία. (α) Να βρείτε τον μέσο αριθμό μορίων του κάθε τύπου στην κάθε πλευρά του δοχείου. (β) Ποια έναι η πιθανότητα να βρείτε 1000 μόρια του Ne στο μεγαλύτερο μέρος και 100 μόρια He στο μικρότερο μέρος του δοχείου αντιστοίχως; (Να βρεθεί, δηλαδή, ξανά το σύστημα στην αρχική του κατάσταση)



3) <u>Σύστημα μ' ένα σπίν σέ θερμική έπαφή μέ σύστημα άπό πολλά σπίν</u>

Γενικεύουμε τό προηγούμενο πρόβλημα θεωρώντας τήν περίπτωση, όπου τό σύστημα A΄ άποτελεῖται άπό έναν αύθαίρετα μεγάλο άριθμό N σωματιδίων μέ σπίν $\frac{1}{2}$, καθένα άπό τά όποῖα έχει μαγνητική ροπή μ_0. Τό σύστημα A άποτελεῖται κι έδῶ άπό ένα μόνο σπίν $\frac{1}{2}$ μέ μαγνητική ροπή μ_0. Καί τά δύο συστήματα τοποθετοῦνται στό ίδιο μαγνητικό πεδίο **B** καί έρχονται σ' έπαφή μεταξύ τους, ὥστε νά μποροῦν έλεύθερα ν' άνταλλάσσουν ένέργεια. Όταν ή ροπή τοῦ A κατευθύνεται πρός τά πάνω, n άπό τίς ροπές τοῦ A΄ κατευθύνονται πρός τά πάνω καί οί ύπόλοιπες $n' = N - n$ κατευθύνονται πρός τά κάτω.

(a) Νά βρεθεῖ ό άριθμός τῶν προσιτῶν καταστάσεων στό σύνθετο σύστημα A + A΄, όταν ή ροπή τοῦ A κατευθύνεται πρός τά πάνω. Αύτός ό άριθμός εἶναι, φυσικά, τό πλῆθος τῶν τρόπων, κατά τούς όποίους μποροῦν νά τακτοποιοῦνται τά N σπίν τοῦ A΄, ὥστε n άπ' αύτά νά κατευθύνονται πρός τά πάνω καί n΄ νά κατευθύνονται πρός τά κάτω.

(b) Ύποθέτουμε τώρα ότι ή ροπή τοῦ συστήματος A κατευθύνεται πρός τά κάτω. Ή όλική ένέργεια τοῦ σύνθετου συστήματος A + A΄ πρέπει βέβαια νά παραμένει άμετάβλητη. Πόσες άπό τίς ροπές τοῦ συστήματος A΄ κατευθύνονται πρός τά πάνω καί πόσες πρός τά κάτω; Νά βρεθεῖ άντίστοιχα ό άριθμός τῶν προσιτῶν καταστάσεων γιά τό σύνθετο σύστημα A + A΄.

(c) Νά ύπολογιστεῖ ό λόγος P_-/P_+, όπου P_- εἶναι ή πιθανότητα γιά νά κατευθύνεται ή ροπή τοῦ A πρός τά κάτω, καί P_+ ή πιθανότητα γιά νά κατευθύνεται αύτή ή ροπή πρός τά πάνω. Τό άποτέλεσμα άπλοποιεῖται, άν χρησιμοποιηθεῖ τό γεγονός ότι $n \gg 1$ καί $n' \gg 1$. Άν $n > n'$, ό λόγος P_-/P_+ εἶναι μεγαλύτερος ή μικρότερος άπό τή μονάδα;

ΑΣΚΗΣΗ 1 (α) Έχουμε συνολικά $2^N = 2^5 = 32$ καταστάσεις.

	A		A′			M	M′	M*	E	E′	E*
1	+	+	+	+	+	$2\mu_o$	$3\mu_o$	$5\mu_o$	$-2\mu_oB$	$-3\mu_oB$	$-5\mu_oB$
2	+	+	+	+	-	$2\mu_o$	μ_o	$3\mu_o$	$-2\mu_oB$	$-\mu_oB$	$-3\mu_oB$
3	+	+	+	-	+	$2\mu_o$	μ_o	$3\mu_o$	$-2\mu_oB$	$-\mu_oB$	$-3\mu_oB$
4	+	+	-	+	+	$2\mu_o$	μ_o	$3\mu_o$	$-2\mu_oB$	$-\mu_oB$	$-3\mu_oB$
5	+	+	+	-	-	$2\mu_o$	$-\mu_o$	μ_o	$-2\mu_oB$	μ_oB	$-\mu_oB$
6	+	+	-	+	-	$2\mu_o$	$-\mu_o$	μ_o	$-2\mu_oB$	μ_oB	$-\mu_oB$
7	+	+	-	-	+	$2\mu_o$	$-\mu_o$	μ_o	$-2\mu_oB$	μ_oB	$-\mu_oB$
8	+	+	-	-	-	$2\mu_o$	$-3\mu_o$	$-\mu_o$	$-2\mu_oB$	$3\mu_oB$	μ_oB
9	+	-	+	+	+	0	$3\mu_o$	$3\mu_o$	0	$-3\mu_oB$	$-3\mu_oB$
10	+	-	+	+	-	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	$-\mu_oB$
11	+	-	+	-	+	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	$-\mu_oB$
12	+	-	-	+	+	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	$-\mu_oB$
13	+	-	+	-	-	0	$-\mu_o$	$-\mu_o$	0	μ_oB	μ_oB
14	+	-	-	+	-	0	$-\mu_o$	$-\mu_o$	0	μ_oB	μ_oB
15	+	-	-	-	+	0	$-\mu_o$	$-\mu_o$	0	μ_oB	μ_oB
16	+	-	-	-	-	0	$-3\mu_o$	$-3\mu_o$	0	$3\mu_oB$	$3\mu_oB$
17	-	+	+	+	+	0	$3\mu_o$	$3\mu_o$	0	$-3\mu_oB$	$-3\mu_oB$
18	-	+	+	+	-	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	$-\mu_oB$
19	-	+	+	-	+	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	μ_oB
20	-	+	-	+	+	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	$-\mu_oB$
21	-	+	+	-	-	0	$-\mu_o$	$-\mu_o$	0	μ_oB	μ_oB
22	-	+	-	+	-	0	$-\mu_o$	$-\mu_o$	0	μ_oB	μ_oB
23	-	+	-	-	+	0	$-\mu_o$	$-\mu_o$	0	μ_oB	μ_oB
24	-	+	-	-	-	0	$-3\mu_o$	$-3\mu_o$	0	$3\mu_oB$	$3\mu_oB$
25	-	-	+	+	+	$-2\mu_o$	$3\mu_o$	μ_o	$2\mu_oB$	$-3\mu_oB$	$-\mu_oB$
26	-	-	+	+	-	$-2\mu_o$	μ_o	$-\mu_o$	$2\mu_oB$	$-\mu_oB$	μ_oB
27	-	-	+	-	+	$-2\mu_o$	μ_o	$-\mu_o$	$2\mu_oB$	$-\mu_oB$	μ_oB
28	-	-	-	+	+	$-2\mu_o$	μ_o	$-\mu_o$	$2\mu_oB$	$-\mu_oB$	μ_oB
29	-	-	+	-	-	$-2\mu_o$	$-\mu_o$	$-3\mu_o$	$2\mu_oB$	μ_oB	$3\mu_oB$
30	-	-	-	+	-	$-2\mu_o$	$-\mu_o$	$-3\mu_o$	$2\mu_oB$	μ_oB	$3\mu_oB$
31	-	-	-	-	+	$-2\mu_o$	$-\mu_o$	$-3\mu_o$	$2\mu_oB$	μ_oB	$3\mu_oB$
32	-	-	-	-	-	$-2\mu_o$	$-3\mu_o$	$-5\mu_o$	$2\mu_oB$	$3\mu_oB$	$5\mu_oB$

το + ισοδυναμει με σπιν ↑,δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το **B**

το - ισοδυναμεί με σπιν↓, δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το **-B**

(β) Αρχικά, προτού έρθουν σε θερμική επαφή τα δύο συστήματα, A και *A′*, το σύστημα A*, βρίσκεται στην κατάσταση # 25:

	A		A′			M	M′	M*	E	E′	E*
25	-	-	+	+	+	$-2\mu_o$	$3\mu_o$	μ_o	$2\mu_oB$	$-3\mu_oB$	$-\mu_oB$

Αφού έρθουν σε επαφή τα δύο συστήματα, A και *A′*, το **A*** μπορεί να βρίσκεται, με ίση πιθανότητα, σε κάθε μία από τις καταστάσεις με ίδια ολική μαγνήτιση **M***$=\mu_o$ και άρα ολική ενέργεια **E***$=-\mu_oB$. Σύμφωνα με τον πίνακα οι καταστάσεις αυτές είναι οι εξής δέκα:
5, 6, 7, 10, 11, 12, 18, 19, 20 & 25.

	A		A′			M	M′	M*	E	E′	E*
5	+	+	+	-	-	$2\mu_o$	$-\mu_o$	μ_o	$-2\mu_oB$	μ_oB	$-\mu_oB$
6	+	+	-	+	-	$2\mu_o$	$-\mu_o$	μ_o	$-2\mu_oB$	μ_oB	$-\mu_oB$
7	+	+	-	-	+	$2\mu_o$	$-\mu_o$	μ_o	$-2\mu_oB$	μ_oB	$-\mu_oB$
10	+	-	+	+	-	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	$-\mu_oB$
11	+	-	+	-	+	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	$-\mu_oB$
12	+	-	-	+	+	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	$-\mu_oB$
18	-	+	+	+	-	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	$-\mu_oB$
19	-	+	+	-	+	0	μ_o	μ_o	0	$-\mu_oB$	μ_oB

20	-	+	-	+	+	0	μ_o	$\boldsymbol{\mu_o}$	0	$-\mu_o B$	$\boldsymbol{-\mu_o B}$
25	-	-	+	+	+	$-2\mu_o$	$3\mu_o$	$\boldsymbol{\mu_o}$	$2\mu_o B$	$-3\mu_o B$	$\boldsymbol{-\mu_o B}$

(βi&ii) Παρατηρούμε ότι η μαγνήτιση, M, του A και η μαγνήτιση, M', του A' παίρνουν τις τιμές
$M = -2\mu_o$ και $M' = 3\mu_o$ μία φορά (στην κατάσταση # 25),
$M = 0$ και $M' = \mu_o$ έξι φορές (στις καταστάσεις # 10, 11,12, 18, 19, 20),
$M = 2\mu_o$ και $M' = -\mu_o$ τρεις φορές (στις καταστάσεις # 5, 6, 7)
Άρα,
$P(M=-2\mu_o) = 1/10$, $P(M= 0) = 6/10$, $P(M=2\mu_o) = 3/10$

και $\langle M\rangle = (-2\mu_o)P(M=-2\mu_o) + (0)P(M=0)+(2\mu_o) P(M=2\mu_o)$
$= (-2\mu_o)(1/10) +(0)(6/10) + (2\mu_o)(3/10) = 0{,}4\ \mu_o$

Αντιστοίχως,
$P(M'=3\mu_o) = 1/10$, $P(M'= \mu_o) = 6/10$, $P(M'=-\mu_o) = 3/10$

και $\langle M'\rangle = (3\mu_o)P(M'=3\mu_o) + (\mu_o)P(M'= \mu_o)+(-\mu_o) P(M'=-\mu_o)$
$= (3\mu_o)(1/10) +(\mu_o)(6/10) + (-\mu_o)(3/10) = 0{,}6\ \mu_o$

Συνεπώς, $\langle M\rangle =0{,}4\ \mu_o$ και $\langle M'\rangle= 0{,}6\ \mu_o$ και βέβαια, $\langle M^*\rangle =\langle M\rangle +\langle M'\rangle= \mu_o$.

(β iii) Στην περίπτωση που τα συστήματα A και A' χωρίζονται ξανά, ώστε να μη μπορούν να ανταλλάξουν ενέργεια μεταξύ τους, οι τιμές της πιθανότητας P(M), καθώς και η μέση μαγνήτιση $\langle M\rangle$, δεν θα αλλάξουν.

ΑΣΚΗΣΗ 2

(α) Όταν επέλθει η ισορροπία, τα μόρια του κάθε αερίου θαείναι ισοκατανεμημένα (θα είναι δηλαδή κατανεμημένα με ίση πιθανότητα) σε όλο τον όγκο του δοχείου. Άρα, στο αριστερό μέρος του δοχείου (που καταλαμβάνει τα 4/5 του συνολικού όγκου) θα βρίσκονται τα 4/5 του κάθε αερίου. Για το δεξί μέρος αντιστίχως θα βρίσκονται το 1/5 των μορίων του κάθε αερίου.

$\langle N_{Ne}^{(αριστερά)}\rangle= (4/5)\ N_{Ne} = (4/5)\times 1000 = 800$ $\langle N_{Ne}^{(δεξιά)}\rangle= (1/5)\ N_{Ne} = (1/5)\times 1000 = 200$
$\langle N_{He}^{(αριστερά)}\rangle= (4/5)\ N_{He} = (4/5)\times 100 = 80$ $\langle N_{He}^{(δεξιά)}\rangle= (1/5)\ N_{He} = (1/5)\times 100 = 20$

(β) Ο αριθμός των καταστάσεων που είναι προσιτές σε κάθε μόριο είναι ανάλογος του διαθέσιμου όγκου, $\Omega \propto V$. Τότε,
για κάθε ένα μόριο τύπου α, $(\Omega_{1\,f}^{(\alpha)}/ \Omega_{1\,i}^{(\alpha)}) = (V_f^{(\alpha)}/ V_i^{(\alpha)})$, όπου $\Omega_{1\,i}^{(\alpha)}$, $\Omega_{1\,f}^{(\alpha)}$ είναι ο [αρχικός (i), τελικός (f)]αριθμός των καταστάσεων του ενός μορίου τύπου α,
και για N_α μόρια τύπου α: $(\Omega_f^{(\alpha)}/ \Omega_i^{(\alpha)}) = (V_f^{(\alpha)}/ V_i^{(\alpha)})^{N\alpha}$

Η πιθανότητανα βρούμε πάλι την αρχική κατάσταση, δηλαδή τα 1000 μόρια Ne στο αριστερό και τα 100 μόρια He στο δεξιό μέρος του δοχείου είναι

$$P = \underbrace{(V^{(αριστερά)}/V^{(ολικό)})^{1000}}_{\text{(για το Ne)}} \times \underbrace{(V^{(δεξιά)}/V^{(ολικό)})^{100}}_{\text{(για το He)}} = (4/5)^{1000} \times (1/5)^{100} = 1.56\times 10^{-167}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

(α) Ο αριθμός των καταστάσεων που είναι προσιτές στο σύστημα $A^* = (A + A')$ όταν η μαγνητκή ροπή του A δείχνει επάνω (+, δηλαδή με φορά παράλληλη στο μαγνητικο πεδίο **B**) (και άρα n μαγνητικές ροπές του A΄δείχνουν επάνω (+) και οι υπόλοιπες N-n μαγνητικές ροπές του A΄ δείχνουν προς τα κάτω (-)), είναι
$N_+ = N!/[n!(N-n)!]$

(β) Η μαγνητική ροπή του A δείχνει τώρα προς τα κάτω (-), δηλαδή με φορά αντιπαράλληλη στο μαγνητικο πεδίο **B**), ενώ τα A και A΄ συνεχίζουν να βρίσκονται σε θερμική επαφή. Η ενέργεια E* του A* παραμένει σταθερή. Εφόσον η μαγνητική ροπή του A δείχνει προς τα κάτω (-), τότε, για να

παραμείνει η ολική ενέργεια E* σταθερή, (n+1) μαγνητικές ροπές του A΄ πρέπει να δείχνουν προς τα επάνω (+) και [N-(n+1)] μαγνητικές ροπές του A΄ πρέπει να δείχνουν προς τα κάτω (-).
Άρα, ο αριθμός των καταστάσεων που είναι προσιτές στο σύστημα $A^* = (A + A')$ όταν η μαγνητκή ροπή του A δείχνει προς τα κάτω είναι

$N_- = N!/[(n+1)!(N-(n+1))!]$

Ο ολικός αριθμός των προσιτών καταστάσεων στο σύστημα A* με ενέργεια E* είναι τότε:

$$
\begin{aligned}
N_+ + N_- &= N!/[n!(N-n)!] + N!/[(n+1)!(N-(n+1))!] = \\
&N!(n+1)/[(n+1)!(N-n)!] + N!(N-n)/[(n+1)!(N-n)!] = \\
&(n+1+N-n)N!/[(n+1)!(N-n)!] = (N+1)N!/[(n+1)!(N-n)!] = \\
&(N+1)!/[(n+1)!(N-n)!]
\end{aligned}
$$

Το αποτελεσμα αυτό δείχνει ότι το σύστημα A* = (A+A΄) με N+1 σωματίδια, <u>οποιαδήποτε (n+1)</u> από αυτά μαγνητική ροπή προς τα επάνω και τα υπόλοιπα [N-(n+1)] έχουν μαγνητική ροπή προς τα κάτω.

(γ) $P_+ \propto N_+$, $P_- \propto N_-$

$$
\begin{aligned}
P_+ / P_- = N_+ / N_- &= \{N!/[n!(N-n)!]\} / \{N!/[(n+1)!(N-(n+1))!]\} \\
&= (n+1)/(N-n) = (n+1)/n'
\end{aligned}
$$

$P_-/P_+ = n'/(n+1) \approx (n'/n)(1+1/n)^{-1} \approx (n'/n)(1-1/n + \bullet\bullet\bullet)$

άρα, για n>>1 και για n΄>>1, $\boldsymbol{P_-/P_+ \approx (n'/n)}$.

Αυτό δηλώνει ότι αν η ολική μαγνητική ροπή ενός συστήματος A* = (A+A΄) δείχνει προς τα επάνω, τότε το κάθε ένα σπιν του συστήματος έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να δείχνει προς τα επάνω (δηλαδή παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο **B**) παρά προς τα κάτω.