ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Έστω Α, Β ενδεχόμενα, στον δειγματικό χώρο Ω.

Τότε:

- $P(\varnothing)=0$,
- $P(\Omega)=1$,
- $0\leq P(A) \leq 1$,
- $P(A') = 1- P(A)$, με A' το συμπλήρωμα του Α (δηλ. $A'=\Omega-A$),
- $P(A-B)=P(AB')=P(A)-P(AB)$,
- $P(A\cup B)=P(A) + P(B) - P(AB)$,
- $P(A'\cup B')=P((AB)')=1- P(AB)$,
- $P(A'B')=P((A\cup B)')=1- P(A\cup B)$,
- Αν A,B ξένα (δηλαδή $A\cap B=AB=\varnothing$) τότε $P(A\cup B)=P(A) + P(B)$.

Γενικευμένος Αθροιστικός τύπος:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum\sum_{1\leq i\leq j\leq n} P(A_iA_j)+\sum\sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq n}\sum P(A_iA_jA_k)-....+(-1)^{(n-1)}P(A_1A_2...A_n).$$

Δεσμευμένη πιθανότητα: $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, με $P(B)>0$.

Όταν P(A), P(B)>0 ισχύει ο πολλαπλασιαστικός τύπος:

$$P(AB) = P(A|B)\, P(B) = P(B|A)\, P(A).$$

Από τον πολλαπλασιαστικό τύπο και τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας απορρέει η ακόλουθη σχέση όταν P(A), P(B)>0:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

Αν B_1, B_2,….. ακολουθία ξένων ενδεχομένων με $\bigcup_i B_i=\Omega$ και $P(B_i)>0$ (i=1,2,…),

τότε $\forall$ ενδεχόμενο Α:

$$P(A)=\sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

Το θεώρημα ολικής πιθανότητας ισχύει και στην περίπτωση που B_1, B_2,….. είναι ακολουθία ξένων ενδεχομένων με $\bigcup_i B_i \subset \Omega$ και $P(B_i)>0$, και $A\subset \bigcup_i B_i$ (i=1,2,…).

<u>Θεώρημα Bayes:</u>

Αν B_1, B_2 ,….. ακολουθία ξένων ενδεχομένων με $\bigcup_i B_i = \Omega$ και $P(B_i)>0$ (i=1,2,…),

τότε $\forall$ ενδεχόμενο A, με $P(A)>0$:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}, \quad k=1,2,\ldots.$$

Όπως και στο θεώρημα ολικής πιθανότητας έτσι και εδώ το θεώρημα ισχύει και όταν B_1, B_2,….. είναι ακολουθία ξένων ενδεχομένων με $\bigcup_i B_i \subset \Omega$ και $P(B_i)>0$, και $A\subset \bigcup_i B_i$ (i=1,2,…), με $P(A)>0$.

<u>Γενικευμένος Πολλαπλασιαστικός τύπος:</u>

$P(A_1A_2\ldots A_{n+1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\ldots\ldots P(A_{n+1}|A_1A_2\ldots A_n)$,

όταν $P(A_1A_2\ldots A_n)>0$

<u>Ανεξαρτησία:</u>

Τα ενδεχόμενα A, B καλούνται ανεξάρτητα $\xleftrightarrow{ορσ.}$ $P(AB)=P(A)P(B)$.

Όταν P(A), P(B) > 0 τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

$$P(AB)=P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|B)=P(A) \Leftrightarrow P(B|A)=P(B).$$

- A, Ω ανεξάρτητα,
- A, $\varnothing$ ανεξάρτητα,
- Αν A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ A, B' ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ A', B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ A', B' ανεξάρτητα.

Τα ενδεχόμενα A_1, A_2….. καλούνται ανά δύο ανεξάρτητα $\xleftrightarrow{ορσ.}$ $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$ $\forall i\neq j$.

Τα ενδεχόμενα A_1, A_2….. καλούνται (πλήρως) ανεξάρτητα $\xleftrightarrow{ορσ.}$ $\forall$ σύνολο δεικτών J={1,2,…,n}, $n\in N$, $P(\bigcap_{j\in J} A_j)=\prod_{j\in J} P(A_j)$.

- Τα ενδεχόμενα A_1, A_2….. πλήρως ανεξάρτητα $\Rightarrow$ Τα ενδεχόμενα A_1, A_2….. ανά δύο ανεξάρτητα (το αντίστροφο δεν ισχύει).