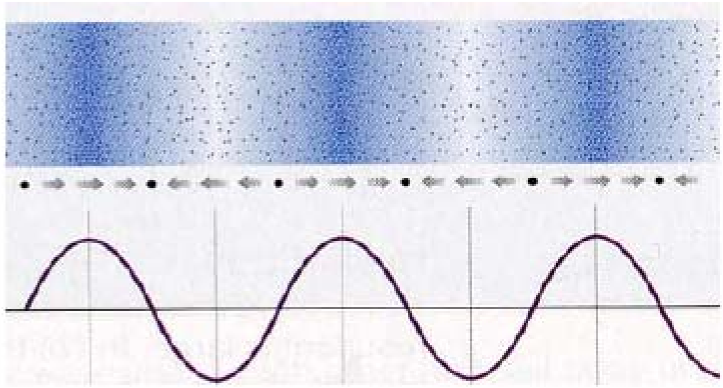
<u>ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ</u>

Α’ μέρος

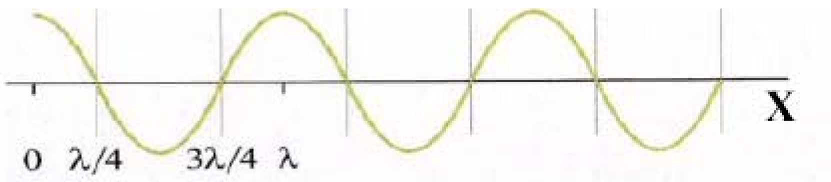


Μια «ταλάντωση» που ταξιδεύει:
Η συνάρτηση που περιγράφει το κύμα $\psi(\mathrm{x,t})$ είναι συνάρτηση τόσο της θέσης όσο και του χρόνου.

Είναι περιοδική τόσο στην θέση όσο και στον χρόνο

$\psi(\mathrm{x}+\lambda,\mathrm{t})=\psi(\mathrm{x,t}) \qquad \psi(\mathrm{x,t+T})=\psi(\mathrm{x,t})$

όπου λ είναι το μήκος κύματος και T η περίοδος



Χρησιμοποιούμε επίσης τον κυματαροθμό

$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ και την συχνότητα $\nu=\dfrac{1}{\mathrm{T}}$ καθώς και την γωνιακή συχνότητα $\omega=\dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}=2\pi\nu$

Μέσα σε μια περίοδο το κύμα ταξιδεύει κατά ένα μήκος κύματος άρα η ταχύτητα του, ονομαζόμενη και φασική ταχύτητα είναι

$$\upsilon=\frac{\lambda}{\mathrm{T}}=\frac{\omega}{k}$$

Το πλάτος του κύματος αντιστοιχεί στο φυσικό μέγεθος που καθορίζει την κυματική διαταραχή: πίεση στο ηχητικό κύμα, τάση στη χορδή, ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στο ηλεκτρομαγνητικό κύμα (φώς).

Συνήθης απλή μορφή $\psi(\mathrm{x,t})=\mathrm{A}\sin(k\mathrm{x}-\omega\mathrm{t}-\phi)$, όπου ϕ η τυχαία φάση που καθορίζεται από τις αρχικές/οριακές συνθήκες. Το ανωτέρω κύμα διαδίδεται με φορά τα θετικά του άξονα x αν $0\leq\omega$ και αντίστοιχα στα αρνητικά για $\omega\leq 0$.

Σύνθεση-συμβολή κυμάτων:

ψ_1(x,t)=A sin(kx-ωt) ψ_2(x,t)=A sin(kx-ωt-ϕ)

χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική εξίσωση

$$\sin(\mathrm{A})+\sin(B)=2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

παίρνουμε

$$\psi=\psi_1+\psi_2=2\mathrm{A}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(k\mathrm{x}-\omega\mathrm{t}-\frac{\phi}{2}\right)$$

που σημαίνει οτι το συνολικό κύμα έχει την ίδια συχνότητα και μήκος κύματος αλλά το πλάτος διαμορφώνεται με βάση την τιμή της ϕ. Π.χ. για $\phi=\pi$ το πλάτος μηδενίζεται ! Δηλαδή τα κύματα αλληλοαναιρούνται. Έχουμε το φαινόμενο της καταστρεπτικής συμβολής.

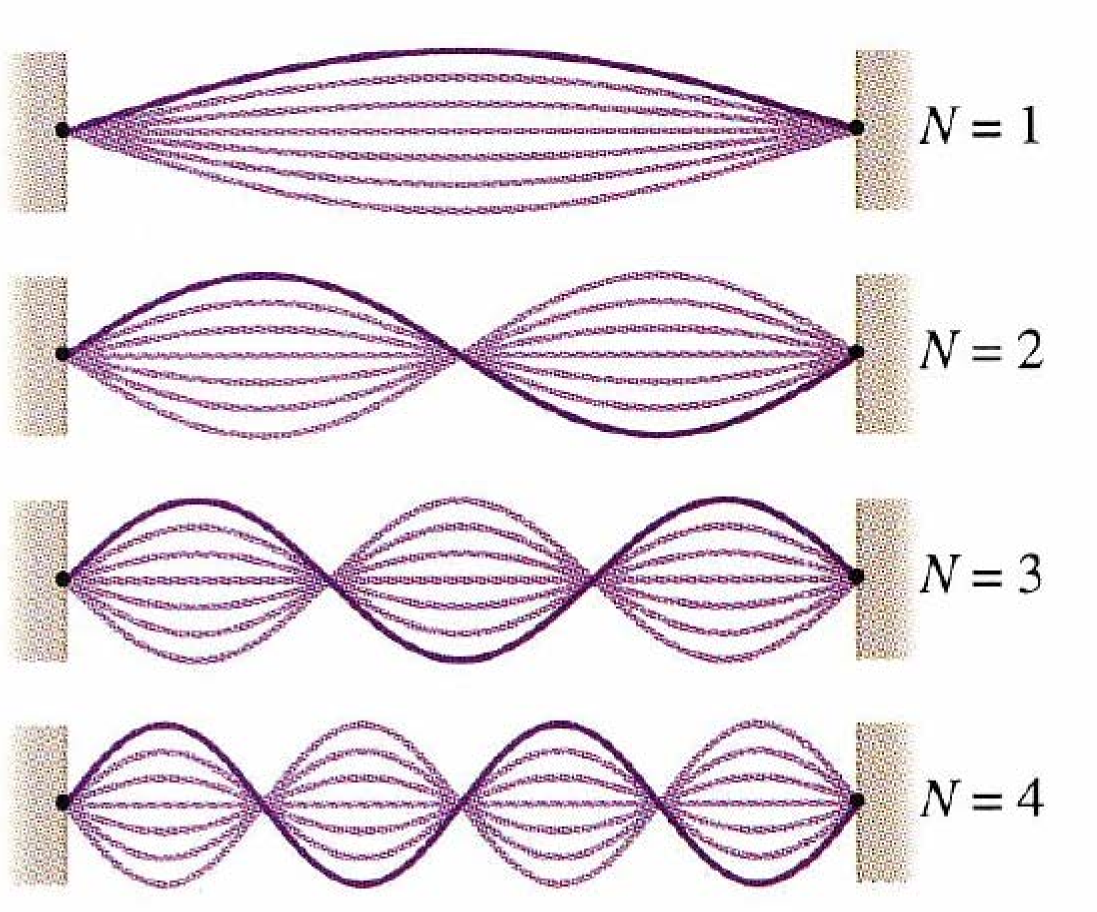
Μια επίσης ενδιαφέουσα περίπτωση έχουμε και όταν συνθέτουμε κύματα που κινούνται με αντίθετη φορά:

ψ_1(x,t)=A sin(kx-ωt) ψ_2(x,t)=A sin(kx+ωt)

οπότε το συνολικό κύμα γράφεται

$$\psi=\psi_1+\psi_2=2\mathrm{A}\cos(\omega t)\sin(k\mathrm{x})$$

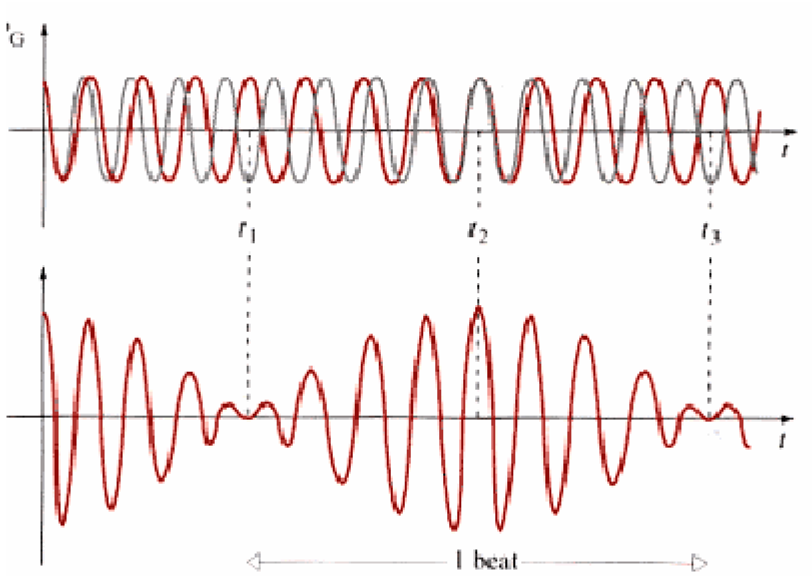
και άρα έχουμε ανεξάρτητες ταλαντώσεις, στάσιμο και όχι τρέχον κύμα. Στο σχήμα φαίνονται διάφορα στάσιμα κύματα.



Στην γενικότερη περίπτωση έχουμε συμβολή κυμάτων με διαφορετικές συχνότητες και πλάτη

$$\psi = \sum \psi_n = \sum A_n \sin(k_n x - \omega_n t)$$

Στο σχήμα δίνεται η συμβολή δύο κυματικών διαταραχών με παραπλήσιες συχνότητες και κυματαριθμούς. Το αποτέλεσμα είναι να συνυπάρχουν δύο «ταλαντώσεις». Η μία έχει συχνότητα όσο περίπου και τα αρχικά κύματα, ενώ η άλλη στην οποία οφείλεται η διαμόρφωση του πλάτους έχει πολύ πιο αργή συχνότητα.



Ο παλμός διαμόρφωσης του πλάτους έχει τώρα μια διαφορετική ταχύτητα, η οποία λέγεται ομαδική ταχύτητα και δίνεται απο

$\upsilon = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$ και στην γενικότερη περίπτωση $\upsilon = \dfrac{d\omega(k)}{dk}$ που προϋποθέτει ότι η γωνιακή συχνότητα εξαρτάται από το μήκος κύματος (κυματαριθμό). Η σχέση $\omega = \omega(k)$ προσδιορίζεται ως σχέση διασποράς και είναι χρήσιμη για τα κυματοπακέτα.

Πηγαίνετε στο
http://krypton.mankato.msus.edu/~7364eb/Math113/groupvelocity.html
για να πάρετε μια παραστατική ιδέα της ομαδικής ταχύτητας.

Η κυματική εξίσωση που περιγράφει ενοποιημένα όλα τα κυματικά φαινόμενα γράφεται:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

και τα βασικά της χαρακτηριστικά είναι η γραμμικότητα και η δεύτερη τάξη στις παραγώγους χρόνου και χώρου (θέσης). Θεμελιώδης ιδιότητα είναι οτι αν ψ_1 και ψ_2 είναι λύσεις τότε και $\psi = a\psi_1 + b\psi_2$ είναι επίσης λύση για αυθαίρετες σταθερές a και b.