①

$4 \times 4 = 16$

$16 \times 16 = 256$

$256 \times 4 = 1024$

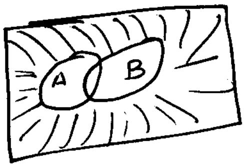
Πιθανότητες

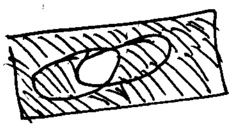
→ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

→ Αν $P(A \cap B) = 0$, δηλ. $(A \cap B) = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$\bar{A} = (\Omega - A)$

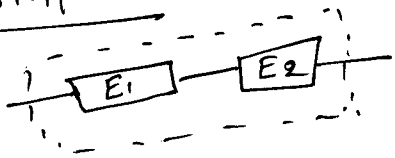
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$\overline{A \cup B} =$  $= \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} =$  $= \bar{A} \cup \bar{B}$

<u>Αξιοπιστία συστήματος</u> (Η πιθανότητα $p(A)$, A: Το σύστημα λειτουργεί)

(i) <u>Σε σειρά:</u>



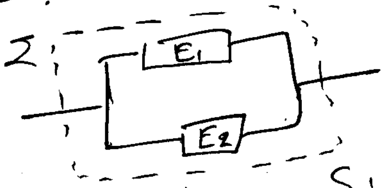
Ονομάζουμε E_1 το γεγονός: "Το εξάρτημα E_1 λειτουργεί"
και E_2 το γεγονός: "Το εξάρτημα E_2 λειτουργεί".

Για να λειτουργεί η συσκευή πρέπει να δουλεύουν ταυτόχρονα τα E_1 και E_2.

$\Sigma = E_1 \cap E_2 \Rightarrow P(\Sigma) = P(E_1 \cap E_2) \Rightarrow P(\Sigma) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

Για ν συσκευές: $P(\Sigma) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \ldots \cdot P(E_\nu)$

ii) <u>Παράλληλα:</u>

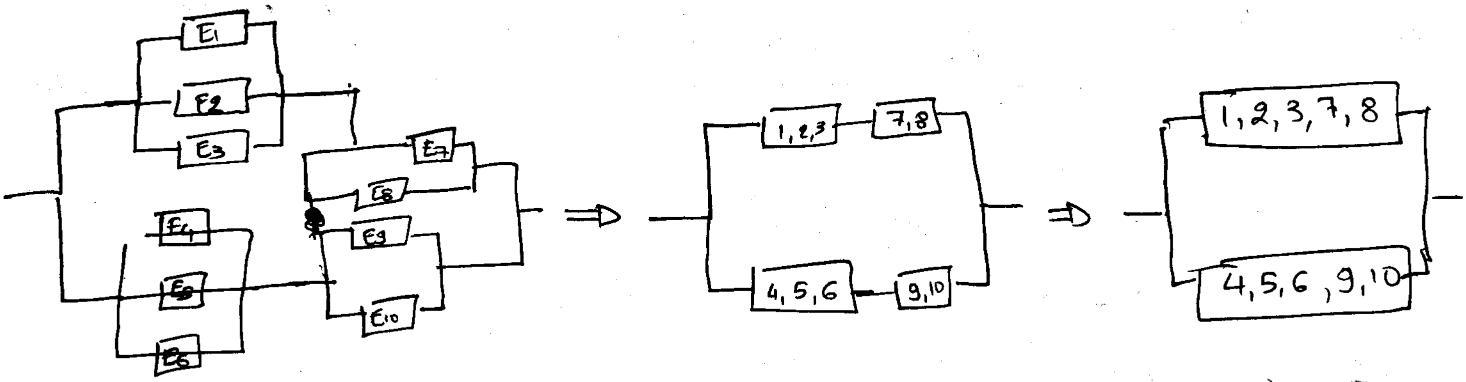


Αρκεί να λειτουργεί ένας από τους δύο διακόπτες.

$P(\Sigma) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \Rightarrow$

$\Sigma = E_1 \cup E_2 \Rightarrow P(\Sigma) = P(E_1 \cup E_2) \Rightarrow$

$P(\Sigma) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1) \cdot P(E_2)$



Συνεχείς Κατανομές

$$\frac{\text{Πιθανότητα}}{\text{Μονάδα μήκους}} = \frac{dP}{dx} = f(x) \Rightarrow dP = f(x)\cdot dx$$

Η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σωματίδιο μεταξύ των a,b είναι

$$P(a<x<b) = \int_a^b f(x)\cdot dx$$

$\boxed{f(x) \to \text{Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας}}$

⇒ Η θέση "x" μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή πάνω στον $x'x$. Άρα η "x" είναι μια συνεχής μεταβλητή.

Η θέση ενός σωματιδίου πάνω στον άξονα $x'x$ είναι μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) και συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα X. Οι τιμές της X θα συμβολίζονται με x.

$P(X=x) \to$ Πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να πάρει τιμή x.

$P(a<X<b) \to$ Πιθανότητα η X να πάρει τιμές στο (a,b)

Ισχύει: $P(-\infty < X < +\infty) = 1 \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1}$ Συνθήκη Κανονικοποίησης

Κάθε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει τις εξής ιδιότητες:

i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1$ ή $P(-\infty < X < +\infty) = 1$

Ισχύει και το αντίστροφο.

Πιθανότητες

Άσκηση

Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{αλλού}) \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η c.

β) $P\left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right)=;$

Λύση

α) Ισχύει ότι $\int_0^1 c x^2(1-x)\,dx = 1 \Rightarrow c\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 1 \Rightarrow$

$$c\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = 1 \Rightarrow c\int_0^1 x^2\,dx - c\int_0^1 x^3\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$c\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) - c\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right) = 1 \Leftrightarrow c\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{c=12}$$

β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P=\int_{1/4}^{1/2} 12(x^2-x^3)\,dx \Leftrightarrow$

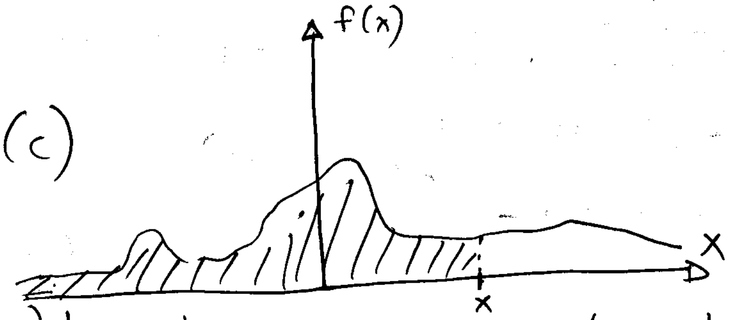
$$P = 12\left[\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{1/4}^{1/2}\right) - \left(\frac{x^4}{4}\Big|_{1/4}^{1/2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$P = 12\left[\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{192}\right) - \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{1024}\right)\right] = \ldots = \frac{67}{256}$$

Συνάρτηση κατανομής τυχαίας συνεχούς μεταβλητής

$P(X \leq c) = P(-\infty < X \leq c) \Rightarrow$

$P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = F(c)$



Η $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας. Έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

α) Παντού συνεχής.

β) $(\Sigma.\Pi.\Pi)' = \Sigma.K.\Pi$ ή $F'(x) = f(x)$

γ) $0 \leq F(x) \leq 1 \Rightarrow$ η $F(x)$ είναι πιθανότητα.

δ) $F(-\infty) = 0$ και $F(+\infty) = 1$.

Προσοχή στα σημεία αλλαγής τύπου της συνάρτησης

Παράμετροι συνεχούς τυχαίας κατανομής

1) Κορυφή ή επικρατούσα τιμή: Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας

2) Διάμεσος ή διχοτόμος: Η τιμή δ για την οποία $P(X \leq \delta) = P(X \geq \delta) = 0,5$

3) α-ποσοστιαίο σημείο: Ο αριθμός x_α, ώστε να ισχύει $P(X \leq x_\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0,1)$

ή Διάμεσος: 0,5 ποσοστιαίο σημείο.

4) Μέση τιμή: Είναι η τετμημένη του κέντρου βάρους του επιπέδου σχήματος το οποίο οριοθετείται μεταξύ της σ.π.π. και του άξονα x.

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \quad \text{ή} \quad E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

5) Μέση τιμή κάποιας συνάρτησης $g(x)$ της τ.μ. X: $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$.

6) Ροπή ν-τάξης της τ.μ. X. Με $g(X) = X^\nu$, όπου $\nu = 1, 2, \ldots$ παίρνουμε

$$E(X^\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu f(x) \cdot dx.$$

Για $\nu = 1$ έχουμε τη ροπή 1ης τάξης (μέση τιμή) $E(X)$.

Για $\nu = 2$ έχουμε τη ροπή 2ης τάξης $E(X^2)$.

Πιθανότητες

7) Κεντρική ροπή ν-τάξης της τ.μ. Χ.

Είναι η μέση τιμή της συνάρτησης $g(X) = (X-\mu)^\nu$:

$$E\left[(X-\mu)^\nu\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^\nu \cdot f(x)\,dx .$$

Για $\nu=2 \Rightarrow$ Διασπορά της τ.μ. Χ.

8) Διασπορά

$$E(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

9) Τυπική απόκλιση σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(x)}$$

10) Ασυμμετρία

$$a = \frac{1}{\sigma^3} E\left[(x-\mu)^3\right]$$

11) Κύρτωση

$$k = \frac{1}{\sigma^4} E\left[(x-\mu)^4\right].$$

Σπουδαιότερες: $\mu = E(x) \quad \sigma^2 = E(x-\mu)^2]$ Επειδή μ = σταθ, είναι

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - 2\mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx}_{\mu} + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = E(x^2) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) = \mu \end{array}\right\}$$ Χρήσιμες Σχέσεις.

$$\sigma^2 = E(X^2) - E^2(x) = E(X^2) - \mu^2$$

Ιδιότητες της μέσης τιμής συνεχούς τ.μ. $(E(x))$

$\Rightarrow E(X+c) = E(X) + c$

$\Rightarrow E(aX) = a \cdot E(X)$

$\Rightarrow E(a \cdot h(X) + b \cdot g(X)) = a \cdot E(h(X)) + b \cdot E(g(X))$.

Ασκηση

Έστω τ.μ. $X \sim F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $a =$ σταθ. Να βρεθούν:

α) Η σ.π.π β) Η $E(x)$. γ) Η διασπορά και η τυπική απόκλιση.

Λυση

α) $f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

β) $\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^{+\infty} x \cdot a \cdot e^{-ax} dx = a \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$

$\int x \cdot e^{-ax} dx = \frac{1}{-a} \int x (e^{-ax})' \cdot dx = -\frac{1}{a} \int x \cdot d(e^{-ax}) =$

$= -\frac{1}{a}\left(x \cdot e^{-ax} - \int e^{-ax} dx\right) =$

$= -\frac{1}{a}\left(x \cdot e^{-ax} + \frac{1}{a} \cdot e^{-ax}\right) = -\frac{e^{-ax}}{a}\left(x + \frac{1}{a}\right) + c$

Άρα $\mu = E(x) = -a \cdot \frac{e^{-ax}(x+\frac{1}{a})}{a}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x \to +\infty} e^{-ax}\left(x + \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$

γ) $\sigma^2(x) = E(X^2) - \mu^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + a \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-ax} dx \Rightarrow E(X^2) = a \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-ax} dx$

$\int x^2 \cdot e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} \int x^2 \cdot d(e^{-ax}) = -\frac{1}{a}\left(x^2 \cdot e^{-ax} - \int e^{-ax} \cdot dx^2\right) =$

$= -\frac{1}{a} x^2 \cdot e^{-ax} + \frac{2}{a} \int x \cdot e^{-ax} dx = \frac{-1}{a} x^2 \cdot e^{-ax} - \frac{2}{a^2} \cdot e^{-ax}\left(x + \frac{1}{a}\right) + c$

$\boxed{\left(\int x \cdot e^{-ax} = -\frac{e^{-ax}}{a}\left(x + \frac{1}{a}\right) + c\right)}$ Τελικά θα είναι:

$E(X^2) = a \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-ax} dx = a\left(-\frac{x^2 \cdot e^{-ax}}{a} - \frac{2(x+\frac{1}{a}) \cdot e^{-ax}}{a^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{a^3} \cdot a = \frac{2}{a^2}$.

Με $\mu = 1/a \Rightarrow E(X^2) = 2/a^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$

$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\frac{1}{a}$

Πιθανότητες

Ειδικές συνεχείς κατανομές

(I) Η ομοιόμορφη κατανομή

$$f(x) = \begin{cases} c, & a \leq x \leq b \\ 0, & \mathbb{R} - (a,b) \end{cases} \qquad \boxed{U(a,b)}$$

→ Με τη συνθήκη κανονικοποίησης υπολογίζω τη σταθερά c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} 0 \cdot dx = 1 \Rightarrow$$

$$\int_a^b c \cdot dx = 1 \Rightarrow cb - ca = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{b-a}}$$

$X \sim U(a,b)$ → Η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $\boxed{[a,b]}$.

→ Μέση τιμή: $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{a+b}{2}}$

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma^2(X) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

(II) Η εκθετική κατανομή $E(a)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (x<0) \\ a \cdot e^{-ax}, & (x \geq 0) \end{cases} \qquad \boxed{a = \text{σταθ.} > 0}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{1}{a}}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \boxed{Var(X) = \frac{1}{a^2}}$$

$$Var(X) = \sigma^2 \Rightarrow \boxed{\sigma = +\frac{1}{a}}$$

(*) Να κοιτάξω τα παραδείγματα

III) Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{c_1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-c_2)^2}{2c_1^2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Η συνθήκη κανονικοποίησης $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ ισχύει $\forall\; c_1, c_2 > 0$.

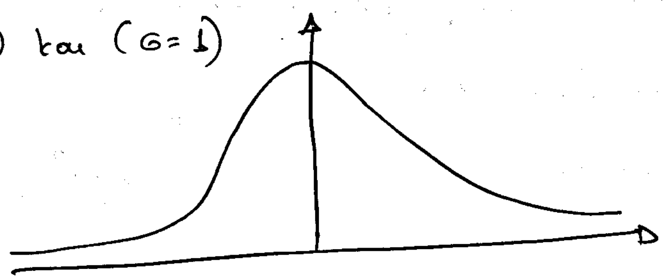
$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{c_1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-c_2)^2}{2c_1^2}} \cdot dx = c_2$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = c_1^2$$

$$\boxed{E(x) = c_2} \quad \text{και} \quad \boxed{\sigma^2 = c_1^2} \Rightarrow \boxed{\sigma = c_1}$$

$\longleftrightarrow$

Τυποποιημένη κανονική κατανομή: $(\mu = 0)$ και $(\sigma = 1)$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ιδιότητες:

1) Συνθήκη κανονικοποίησης

2) $f(x) = f(-x) \rightarrow$ Συμμετρία ως προς τον $y'y$.

3) $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(X<0) = P(X>0) = \frac{1}{2}$.

4) Αν $c > 0$, τότε

$$\int_{-\infty}^{-c} f(x)\,dx = \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \Leftrightarrow P(X<-c) = P(X>c)$$

και $P(X>c) = 1 - P(X<c)$.

5) Για κάθε c_1, c_2 με $c_2 > c_1$, είναι

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c_2} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{c_1} f(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$P(c_1 < X < c_2) = P(X < c_2) - P(X < c_1)$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

Πιθανότητες

Πρόταση

Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή ίση με μ και τυπική απόκλιση ίση με σ, τότε η μεταβλητή $Z=(X-\mu)/\sigma$ ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή κανονική κατανομή με μέση τιμή ίση με 0 και τυπική απόκλιση ίση με 1.

Με βάση την πρόταση αυτή και τον πίνακα τιμών της

$$\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c} e^{-x^2/2}\,dx$$

μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες για τ.μ., η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Είναι:

$$a \leq X \leq b \Leftrightarrow a-\mu \leq X-\mu \leq b-\mu \Rightarrow \frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}$$

Άρα $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P(z_a \leq Z \leq z_b) \Rightarrow$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a)$$

$\longleftrightarrow$

Πρόταση

Αν οι τ.μ. $X, Y, Z, \ldots$ ακολουθούν κανονική κατανομή με (μ_x, σ_x), (μ_y, σ_y), (μ_z, σ_z) αντίστοιχα, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$U = aX + bY + cZ + \ldots \quad (a, b, c \text{ σταθερές}),$$

ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$\mu_U = a\cdot\mu_x + b\cdot\mu_y + c\cdot\mu_z + \ldots$$ και τυπική απόκλιση

$$\sigma_U = \sqrt{a^2\sigma_x^2 + b^2\cdot\sigma_y^2 + c^2\cdot\sigma_z^2}$$

$\longleftrightarrow$

Ειδικά για δύο μεταβλητές X, Y, έχουμε με βάση την παραπάνω πρόταση, ότι:

- Για $a=b=1$, η τυχαία μεταβλητή $U=X+Y$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N\left(\mu_x+\mu_y, \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)$
- Για $a=1, b=-1$, $U=(X-Y) \sim N\left(\mu_x-\mu_y, \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)$

Κεντρικό οριακό Θεώρημα

Έστω μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_\nu$, ανεξάρτητες και ισόνομες. (ακολουθούν την ίδια κατανομή), με μέση τιμή "μ" και τυπική απόκλιση "σ".
Για $\nu \to +\infty$, είναι:

$$S_\nu = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu.$$

Το άθροισμα $S_\nu \sim N(\mu_s, \sigma_s) = N(\nu\mu, \sigma\sqrt{\nu})$

Άσκηση Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παράμετρους $\mu = 10$ και $\sigma = 2$. Ζητούνται:
α) $P(6 < X < 12)$, β) $P(|X-10| < 1)$, γ) $P(X < 4)$.

Λύση Η σ.π.π είναι $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, όπου $\mu = 10, \sigma = 2$.

$$a < X < b \Leftrightarrow \frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}$$

Όμως η $Z = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim N$. Οπότε είναι:

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} f(x) \cdot dx \Rightarrow$$

$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$, όπου η τιμή $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx$

προκύπτει από τον πίνακα της κανονικής κατανομής.

i) $P(6 < X < 12) = P\left(\frac{6-10}{2} < Z < \frac{12-10}{2}\right) = P(-2 < Z < 1) =$

$$= \int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(1) - \Phi(-2).$$

Ισχύει ότι $\Phi(-2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx =$

$= 1 - \Phi(2)$.

Οπότε $P(6 < X < 12) = \Phi(1) - 1 + \Phi(2)$

ii) $|x - 10| < 1 \Rightarrow 9 < x < 11$

$P(|X-10| < 1) = P(9 < X < 11) = P\left(\frac{9-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{11-\mu}{\sigma}\right) = P(-0{,}5 < Z < 0{,}5) \Rightarrow$

$P(|X-10| < 1) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(0{,}5) - 1 + \Phi(0{,}5) = 2\Phi(0{,}5) - 1$

iii) $P(X < 4) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{4-10}{2}\right) = P(Z < -3) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3)$

Πιθανότητες

Ασκηση

Έστω τ.μ $X \sim N(20, 2)$. Να βρεθεί η c, ώστε $P(X<c)=0{,}7$

Λυση

$P(X<c) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{c-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow P(X<c) = \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow$

$\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}7.$

Η μεταβλητή $Z = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$ ακολουθεί κανονική κατανομή.

Με $\Phi(z) = 0{,}7$, βρίσκουμε $Z = 0{,}53$. Άρα $\frac{c-\mu}{\sigma} = 0{,}53 \Rightarrow$

$\frac{c-20}{2} = 0{,}53 \Rightarrow \boxed{c = 21{,}06}$

Ασκηση

Έστω $X \sim N(8,3)$ και $Y \sim N(6,4)$. Ζητείται η πιθανότητα ώστε $X > Y+1$.

Λυση

Θεωρώ την τ.μ. $U = X - Y$. Η U ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \mu_X - \mu_Y = 8 - 6 = 2$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 5$.

$P(X > Y+1) = P(X - Y > 1) = P(U > 1)$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P\left(\frac{U-\mu}{\sigma} > \frac{1-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{U-2}{5} > \frac{1-2}{5}\right) = P(Z > -0{,}2)$.

$P(Z > -0{,}2) = P(-0{,}2 < Z) = \int_{-0{,}2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Rightarrow$

$P(Z > -0{,}2) = \int_{-0{,}2}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \cdot dx \Rightarrow$

$P(Z > -0{,}2) = \int_{0}^{0{,}2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx + \frac{1}{2} \Rightarrow P(Z > -0{,}2) = \int_{-\infty}^{0{,}2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \cdot dx = \Phi(0{,}2)$

Άσκηση

Ηλεκτρικές αντιστάσεις ακολουθούν την ίδια κατανομή με μέση τιμή $47\,\Omega$ και τυπική απόκλιση $3\,\Omega$. Αν $n=10$ αντιστάσεις από αυτές συνδεθούν σε σειρά, να βρεθεί η πιθανότητα ώστε η συνολική αντίσταση να μην υπερβαίνει την τιμή των $480\,\Omega$.

Λύση

Η συνολική αντίσταση είναι $S_{10} = R_1 + R_2 + \dots + R_{10}$ (λόγω του ότι είναι σε σειρά).

Η μέση τιμή είναι $10 \cdot \mu = 470$.

Η τυπική απόκλιση είναι $\sigma\sqrt{10} = 3\sqrt{10} = 9,5$.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(S_{10} < 480) = P\left(\frac{S_{10}-470}{9,5} < \frac{480-470}{9,5}\right) = P(Z < 1,05) =$$

$$= \Phi(1,05) = 0,8531.$$

$$\left(P(-2 \le Z \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - 1 + \Phi(2) = 2\cdot\Phi(2) - 1\right)$$

Άσκηση

Είναι γνωστό ότι καθεμία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\mu=1$ και τυπική απόκλιση $\sigma=1$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ώστε ο μέσος όρος αυτών να βρίσκεται μεταξύ $0,9$ και $1,1$.

Λύση

$S_{100} = X_1 + X_2 + \dots + X_{100} \xrightarrow{Κ.Ο.Θ}$ Κανονική κατανομή N

Μέση τιμή $\rightarrow 100\mu = 100$ και τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{100} = 10$.

$$0,9 < \frac{S_{100}}{100} < 1,1 \Rightarrow 90 < S_{100} < 110 \Rightarrow P\left(0,9 < \frac{S_{100}}{100} < 1,1\right) = P(90 < S_{100} < 110)$$

Θέτω $Z = \frac{S_{100}-100}{10}$. Είναι $P(90 < S_{100} < 110) = P\left(\frac{90-100}{10} < \frac{S_{100}-100}{10} < \frac{110-100}{10}\right) \Leftrightarrow$

$$P(90 < S_{100} < 110) = P(-0,1 < Z < 0,1) = \Phi(0,1) - 1 + \Phi(0,1) = 0,0796.$$

Πιθανότητες

(IV) Η κατανομή "Γάμμα"

Η τυχαία συνεχής μεταβλητή X με θετικές τιμές ακολουθεί την κατανομή "Γάμμα" όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} \cdot x^{b-1} \cdot e^{-ax}, \quad x>0 \qquad a,b>0$$

Η συνάρτηση $\Gamma(b)$ είναι $\Gamma(b+1) = b \cdot \Gamma(b)$

Χρήσιμες τιμές: $\Gamma(1) = 1$ και $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Ειδικές περιπτώσεις:

a) Για $b=1$ η σ.π.π f(x) της κατανομής "Γάμμα" είναι:

$$f(x) = a \cdot e^{-ax} \qquad (x>0)$$

δηλαδή είναι η εκθετική κατανομή.

b) Για $b=1,2,3,\dots,n,\dots$ ή $b \in \mathbb{N}$, είναι $\Gamma(n) = (n-1)!$

Η σ.π.π είναι $f(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} \cdot e^{-ax}$, $a>0$ ⇒ Κατανομή Erlang.

c) Για $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{n}{2}$, $n=1,2,\dots,n$, η σ.π.π είναι:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, \quad x>0, \; n=1,2,\dots$$

"χ^2- κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας" $\chi^2(x/n)$

(V) Κατανομή Weibull

Η τυχαία συνεχής μεταβλητή X, ακολουθεί την κατανομή Weibull όταν η σ.π.π. είναι:

$$f(x) = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot e^{-ax^b}, \quad x>0, \; a,b>0 \text{ σταθερές}$$

Άσκηση: Έστω τ.μ. ~ Weibull, $a=0,2$, $b=3$. $P(X \geq 5) = ;$

Λύση: $P(X \geq 5) = \int_5^{+\infty} f(x)\,dx$, $f(x)$ → σ.π.π Weibull.

$$f(x) = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot e^{-ax^b} \Rightarrow f(x) = 0,2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot e^{-0,2 \cdot x^3} \Rightarrow f(x) = 0,6 \cdot x^2 \cdot e^{-0,2 \cdot x^3}$$

Άρα $P = \int_5^{+\infty} 0,6 \cdot x^2 \cdot e^{-0,2 \cdot x^3} dx = \frac{1}{3} \cdot 0,6 \cdot \int_5^{+\infty} e^{-0,2x^3} \cdot dx^3 = -\int_5^{+\infty} e^{-0,2 \cdot x^3} \cdot d(0,2x^3) =$

$$= -e^{-0,2x^3}\Big|_5^{+\infty} = e^{-0,2 \cdot 125} = \frac{1}{e^{25}}$$

Αλλαγή μεταβλητής

Αν είναι δοσμένη η κατανομή της τ.μ. X, ζητείται να προσδιοριστεί η κατανομή της τ.μ. Y, όπου η Y είναι δοσμένη συνάρτηση της τ.μ. X.

Έστω $f(x)$ η σ.π.π. της τ.μ. X και $Y = g(X)$.

α) Θεωρούμε την $y = g(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έστω $x_1(y), x_2(y), \ldots, x_n(y)$ οι ρίζες.

β) Υπολογίζουμε τα $g'(x_1(y)), g'(x_2(y)), g'(x_3(y)), \ldots, g'(x_n(y)) \neq 0$.

γ) Υπολογίζουμε το $f(x_1(y)), f(x_2(y)), f(x_3(y)), \ldots, f(x_n(y))$.

δ) Η σ.π.π. $\varphi(y)$ της τ.μ. Y είναι:

$$\varphi(y) = \frac{f(x_1(y))}{|g'(x_1(y))|} + \frac{f(x_2(y))}{|g'(x_2(y))|} + \ldots + \frac{f(x_n(y))}{|g'(x_n(y))|}$$

ε) Με βάση τη $y = g(x)$ και το δοσμένο Π.Ο. της X, βρίσκω τις τιμές της Y.

Άσκηση

Η τ.μ. X έχει σ.π.π $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ $x \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιοριστεί η c β) Να βρεθεί η σ.π.π. της $Y = X^2$.

Λύση

α) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow c \cdot \left(\text{Arctan}\,x \Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = 1 \Leftrightarrow c \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow$

$c = \frac{1}{\pi}$

β) $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\to y = x^2 \Rightarrow x_1(y) = \sqrt{y}$ και $x_2(y) = -\sqrt{y}$

$\to g'(x) = 2x$

$\to f(x_1(y)) = \frac{1}{\pi(1+x_1^2(y))} = \frac{1}{\pi(1+y)}$ $\quad f(x_2(y)) = \frac{1}{\pi(1+y)}$ $\quad g'(x_1(y)) = 2x_1(y) = 2\sqrt{y}$

$g'(x_2(y)) = 2x_2(y) = -2\sqrt{y}$.

$$\to \varphi(y) = \frac{f(x_1(y))}{|g'(x_1(y))|} + \frac{f(x_2(y))}{|g(x_2(y))|} \Rightarrow \boxed{\varphi(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}\,(1+y)}}$$

Επειδή $x \in (-\infty, +\infty) \xRightarrow{y=x^2} y \in [0, +\infty)$. Όμως $g'(x_1(0)) = g'(x_2(0)) = 0$, άρα $0 < y < +\infty$.

Πιθανότητες

Ασκ Η τ.μ X ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή με σ.π.π:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$$

Να βρεθεί η σ.π.π της $Y = X^2$.

Λυση

α) $y = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1(y) = \sqrt{y} \\ x_2(y) = -\sqrt{y} \end{cases}$

β) $g'(x) = 2x$

γ) $f(x_1(y)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$ $\quad f(x_2(y)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$

$g'(x_1(y)) = 2\sqrt{y}$ $\quad g'(x_2(y)) = -2\sqrt{y}$.

δ) Η σ.π.π της Y είναι:

$$q(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{y}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{y}} \Rightarrow q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-y/2}, (y \neq 0).$$

με $y \in (0, +\infty)$

$\longleftrightarrow$

Ασκ Η τ.μ. X έχει σ.π.π $f(x) = \begin{cases} cx^2, & -2 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$

α) Να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς c.

β) Να βρεθεί η σ.π.π της $Y = X^2/4$.

Λυση α) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-2}^{1} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-2}^{1} cx^2 dx = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{3} \cdot \left(x^3\Big|_{-2}^{1}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{c}{3} \cdot (1 + 8) = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{3} \cdot 9 = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{3}}$

β) Λύνω ως προς x την $y = x^2/4$ $\begin{cases} x_1(y) = 2\sqrt{y} \rightarrow x \in (-1, 1) \\ x_2(y) = -2\sqrt{y} \rightarrow x \in (-2, -1) \cup (-1, 1) \end{cases}$

$-2\sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$g'(x) = \frac{x}{2}$

$f(x_1(y)) = c \cdot x_1^2(y) = c \cdot 4y \qquad g'(x_1(y)) = \sqrt{y}$

$f(x_2(y)) = c \cdot x_2^2(y) = c \cdot 4y \qquad g'(x_2(y)) = -\sqrt{y}$

$\Rightarrow$ Για $x \in (-2, -1) \Rightarrow$ Μοναδική λύση $x_2(y) = -2\sqrt{y}$

$$q(y) = \frac{f(x_2(y))}{|g'(x_2(y))|} = \frac{c \cdot 4y}{|-\sqrt{y}|} = \frac{4cy}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}\sqrt{y}$$

Επειδή $y = x^2/4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq y < 1$.

$\Rightarrow$ Για $x \in (-1, 1) \Rightarrow x_1(y), x_2(y)$.

$$q(y) = \frac{f(x_1(y))}{|g'(x_1(y))|} + \frac{f(x_2(y))}{|g'(x_2(y))|} \Rightarrow q(y) = c \cdot 4\sqrt{y} + c \cdot 4\sqrt{y} \Rightarrow q(y) = \frac{8}{3}\sqrt{y}$$

Επειδή $y = x^2/4 \Rightarrow 0 < y < \frac{1}{4}$

Τελικά θα είναι:
$$q(y) = \begin{cases} \frac{8}{3}\sqrt{y}, & 0 < y < 1/4 \\ 4/3\sqrt{y}, & \frac{1}{4} \leq y < 1 \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Πιθανότητες

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

⇒ Η πιθανότητα p_k ώστε η διακριτή τ.μ. X να πάρει τιμή x_k, δηλαδή $P_k = P(X=x_k)$, είναι μια ακολουθία τιμών.
Η ακολουθία p_k, ονομάζεται "συνάρτηση μάζας πιθανότητας" ή "σ.μ.π".
Σε αντίθεση με την συνεχή τ.μ., είναι $p_k = P(X=x_k) \neq 0$. και $0 < p_k < 1$.

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Μια ακολουθία p_k είναι σ.μ.π, όταν:
- $p_k \geqslant 0$
- $\sum_k p_k = 1$ για όλα τα k.

Παράμετροι ~~Κ~~κατανομών δ.τ.μ

i) Κορυφή
ii) Μέση τιμή ⇒ Είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τ.δ.μ X.
$\mu = E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_k \cdot x_k + \dots \Leftrightarrow E(x) = \sum_k p_k \cdot x_k$.
iii) Μέση τιμή συνάρτησης $g(X)$ της τ.μ. X. $\quad E(g(x)) = \sum_k p_k \cdot g(x_k)$
iv) Ροπή ν-τάξης: $\quad E(X^{\nu}) = \sum_k p_k \cdot x^{\nu}$
v) Κεντρική ροπή ν-τάξης: $\quad E((x-\mu)^{\nu}) = \sum_k p_k \cdot (x_k - \mu)^{\nu}$
vi) Διασπορά = κεντρική ροπή 2ης τάξης $\quad Var(X) = V(X) = E((X-\mu)^2) \Rightarrow$
$V(x) = E(x^2) - E(x).$
vii) Τυπική απόκλιση $\quad \sigma = \sqrt{V(x)}$

Ιδιότητες

i) $E(x+c) = E(x) + c$
ii) $E(aX) = a \cdot E(X)$
iii) $E(a \cdot h(x) + b \cdot g(x)) = a \cdot E(h(x)) + b \cdot E(g(x))$
iv) $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Κατανομές διακριτών τ.μ.

I) Διωνυμική κατανομή (επανάθεση) Bernoulli

Έχουμε 1 κουτί με 7 άσπρες σφαίρες και 3 μαύρες
Η πιθανότητα να είναι άσπρη η σφαίρα που θα τραβήξουμε είναι $p(A) = \frac{7}{10} = 0{,}7$
" " " " μαύρη " " " " " " $p(\bar{A}) = 0{,}3$

Το πείραμα έχει δύο πιθανά ενδεχόμενα.
Το επαναλαμβάνουμε ν φορές.
~~Τα ενδεχόμενα να εμφανιστ~~
Η πιθανότητα να εμφανιστεί το γεγονός A, k φορές είναι:

$$\boxed{p_k = \binom{\nu}{k} p^k \cdot (1-p)^{\nu-k}} \qquad \binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}$$

Η πιθανότητα να τραβήξαμε 3 φορές μια άσπρη από ~~συνολικά~~ αριθμό επαναλήψεων 5 είναι:

$$P_3 = \binom{5}{3} 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2$$

→ Η μέση τιμή $E(X) = \sum_{k=0}^{\nu} p_k \cdot X_k = \sum_{k=0}^{\nu} k \binom{\nu}{k} p^k \cdot (1-p)^{\nu-k} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$$\boxed{E(X) = \nu \cdot p}$$

→ Η διασπορά είναι $\boxed{\sigma^2 = \nu \cdot p(1-p)}$

ν → αριθμός επαναλήψεων
k → αριθμός ευνοϊκών ενδεχομένων.

SOS: **Τα γεγονότα "Τουλάχιστον N" και "Το πολύ N-1" είναι συμπληρωματικά**

Πρόταση

Αν η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(k,\nu,p)$ με δοσμένα (ν,p) με $\nu \gg 1$, τότε η τ.μ. X ακολουθεί προσεγγιστικά κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \nu \cdot p$ και διασπορά $\sigma^2 = \nu p(1-p)$.

SOS
Για πολύ μεγάλα ν ($\nu \to +\infty$) και πολύ μικρό p ($p \to 0$) χρησιμοποιούμε την κατανομή Poisson με $\boxed{\lambda = \nu p}$ ($\lambda \in [1,15]$.

Αν $\lambda > 15$, χρησιμοποιώ κανονική κατανομή με $\mu = \lambda$ και $\sigma^2 = \lambda$.

Πιθανότητες

Κατανομή Poisson

Η διακριτή τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson, όταν η συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι:

$$P_k = P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots \quad \lambda>0, \ \lambda=\text{σταθ.}$$

Λόγω της συνθήκης κανονικοποίησης, πρέπει:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = 1 \Leftrightarrow e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}}$$

Ισχύει $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Την κατανομή Poisson ακολουθεί ο αριθμός των συμβάντων σε ορισμένο χρονικό ή χωρικό διάστημα.

Η παράμετρος λ είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος.

Μέση τιμή: $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \cdot x_k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) \cdot k = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow$

$$E(X) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{E(X) = \lambda}$$

Διασπορά $\rightarrow \boxed{\sigma^2 = \lambda}$

Άσκηση

Ο αριθμός X των εκπεμπομένων σωματιδίων από ραδιενεργό πηγή ακολουθεί την κατανομή Poisson με $\lambda = 4$ σωματίδια/λεπτό. Ζητούνται οι πιθανότητες:

α) Να εκπεμφθούν 3 σωματίδια σ' ένα λεπτό.

β) Τουλάχιστο ένα σωματίδιο σ' ένα λεπτό.

γ) Τρία σωματίδια σε 2 λεπτά!

Λύση

α) $P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \xrightarrow[k=3]{\lambda=4} P(3) = e^{-4} \cdot \frac{4^3}{3!} = \frac{32}{3} \cdot e^{-4}$

β) Τα γεγονότα $X \geq 1$ και $X=0$ είναι συμπληρωματικά. Άρα

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-4}$

γ) Έχουμε αλλαγή της παραμέτρου. Θα είναι $\lambda_1 = 2\lambda = 8$.

Άρα $P(X=3) = e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^3}{3!} = e^{-8} \cdot \frac{8^3}{3!} = \frac{256}{3} \cdot e^{-8}$

(Χωρίς Επανατοποθέτηση)

(III) Υπεργεωμετρική κατανομή

Παράδειγμα: Αν από κουτί (με Λ λευκά και Μ μαύρα σφαιρίδια) εξάγουμε κάποιο πλήθος σφαιριδίων χωρίς επανατοποθέτηση, η πιθανότητα να βγουν λ λευκά και μ μαύρα σφαιρίδια, είναι:

$$P = \frac{\binom{\Lambda}{\lambda}\binom{M}{\mu}}{\binom{\Lambda+M}{\lambda+\mu}}$$

Αν ονομάσουμε $N = \Lambda + M$ τον αρχικό αριθμό των σφαιριδίων και $\nu = \lambda + \mu$ τον αριθμό των εξαγομένων, η πιθανότητα να υπάρχουν λ λευκά σφαιρίδια είναι.

$$P_\lambda = \frac{\binom{\Lambda}{\lambda}\binom{N-\Lambda}{\nu-\lambda}}{\binom{N}{\nu}}$$

Αν ονομάσουμε λοιπόν X τον αριθμό των λευκών σφαιριδίων που υπάρχουν στα ν σφαιρίδια που εξάγουμε χωρίς επανατοποθέτηση από ένα κουτί που περιέχει αρχικά $N = \Lambda + M$ σφαιρίδια, η $X \equiv$ τ.δ.μ με τιμές $0, 1, \dots, \Lambda$. Άρα:

$$P(X=\lambda) = \frac{\binom{\Lambda}{\lambda}\binom{N-\Lambda}{\nu-\lambda}}{\binom{N}{\nu}} \quad \text{και πρέπει} \quad \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \frac{\binom{\Lambda}{\lambda}\binom{N-\Lambda}{\nu-\lambda}}{\binom{N}{\nu}} = 1.$$

(IV) Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X, η οποία παριστάνει το πλήθος των επαναλήψεων του πειράματος ώστε να εμφανισθεί το γεγονός A, n_0 φορές. Μ' άλλα λόγια, αν το γεγονός A θεωρηθεί επιτυχία, θέλουμε σε X δοκιμές να έχουμε n_0 επιτυχίες, με τον περιορισμό, η τελευταία δοκιμή να είναι επιτυχία, δηλαδή οι δοκιμές τερματίζονται όταν εμφανιστεί η n-οστή επιτυχία.
Η πιθανότητα να χρειαστούν k δοκιμές, είναι:

$$P(X=k) = \binom{k-1}{n_0-1} \cdot p^{n_0} \cdot (1-p)^{k-n_0}$$

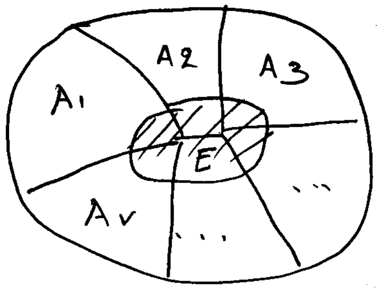
Ανεξάρτητα γεγονότα: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Τότε $P(B/A) = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} \Rightarrow P(B/A) = P(B)$.

Ασυμβίβαστα: $P(A \cap B) = 0 \Leftrightarrow P(B/A) = 0$.

Πιθανότητες

Θεώρημα Bayes



Έστω γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, ασυμβίβαστα μεταξύ τους και E ένα γεγονός το οποίο μπορεί να συμβαίνει ταυτόχρονα με καθένα από τα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$.

Ισχύει ο τύπος ολικής πιθανότητας.

$$P(E) = P(A_1)\cdot P(E/A_1) + P(A_2)\cdot P(E/A_2) + \ldots + P(A_\nu)\cdot P(E/A_\nu)$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα πραγματοποίησης του $A_k \in (A_1, \ldots A_\nu)$, υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει το E, είναι:

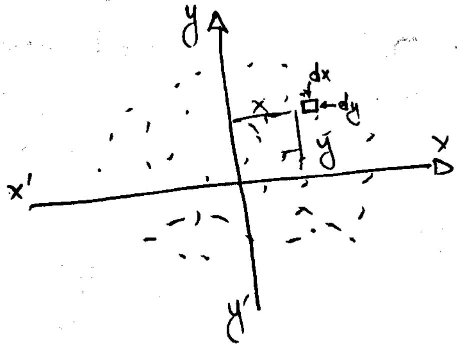
$$P(A_k/E) = \frac{P(A_k)\cdot P(E/A_k)}{P(A_1)\cdot P(E/A_1) + P(A_2)\cdot P(E/A_2) + \ldots + P(A_\nu)\cdot P(E/A_\nu)}$$ → Θεώρημα Bayes

<u>Προσοχή</u>

→ Πρέπει να ισχύει $\sum_{i=1}^{\nu} P(A_i) = 1$.

→ Πρέπει το E να ισχύει ταυτόχρονα με καθένα από τα A_i.

Δισδιάστατες κατανομές



$$dF = dx\cdot dy.$$

Η πιθανότητα dP που έχει μια βολή να χτυπήσει το στοιχειώδες ορθογώνιο dF, είναι

$$dP = f(x,y)\,dF.$$

Η $f(x,y)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ζεύγους (x,y).

$$\boxed{dP = f(x,y)\cdot dx\cdot dy}$$

Είναι $\int_T dP = \iint_T f(x,y)\,dx\,dy = 1$ (Συνθήκη κανονικοποίησης).

Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας

Ορίζεται η συνάρτηση κατανομής $F(x,y)$ του ζεύγους (X,Y), η οποία είναι ίση με την πιθανότητα $P(X\leq x, Y\leq y)$. Είναι λοιπόν:

$$F(x,y)=P(X\leq x, Y\leq y).$$

Αν είναι δοσμένη η συνάρτηση κατανομής $F(x,y)$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}}$$ (Η σειρά παραγώγισης δεν έχει σημασία).

Περιθώριες κατανομές

Η πιθανότητα να βρίσκεται ένα τυχαίο σημείο (X,Y) μέσα σε λωρίδα πάχους dx, δηλαδή μεταξύ των $(x, x+dx)$ είναι:

$$dP=f_1(x)dx \quad \text{και} \quad f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$ (x θεωρείται σταθερά).

Η συνάρτηση $f_1(x)$ ονομάζεται περιθώρια (ή επιμέρους συνάρτηση πυκν. πιθανότητας)

Αντίστοιχα ορίζεται η $f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot dx$

$\longleftrightarrow$

Πρόταση: Οι τυχαίες μεταβλητές X,Y, είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες όταν η από κοινού σ.π.π ισούται με $f(x_1)\cdot f_2(y)$ ή $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

$\longleftrightarrow$

Τόπος κανονικός ως προς x: Περικλείεται από τις ευθείες $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=kx+\lambda$.

" " " " y: " " " $x=a$, $x=ky+\lambda$, $y=b$, $y=c$.

$\longleftrightarrow$

Πιθανότητες

Παράμετροι δισδιάστατων κατανομών

$$E(\varphi(X,Y)) = \iint_{T} \varphi(x,y)\cdot f(x,y)\,dx\cdot dy \Leftarrow$$ Μέση τιμή της $\varphi(X,Y)$.

Αν $\varphi(X,Y)=X$, έχουμε τη μέση τιμή της X.

$$\boxed{E(X) = \iint_{T} x\cdot f(x,y)\,dx\cdot dy.}$$

$$\boxed{E(Y) = \iint_{T} y\cdot f(x,y)\cdot dx\cdot dy}$$

και αντίστοιχα της Y

$$\boxed{E(XY) = \iint_{T} f(x,y)\,dx\cdot dy}$$

Η μέση τιμή της $g(X,Y) = (X-E(X))(Y-E(Y))$ είναι:

$$E(g(X,Y)) = \iint_{T} (x-E(x)(y-E(y))\cdot f(x,y)\cdot dx\cdot dy \leftarrow$$ Συνδιακύμανση $Cov(X,Y)$.

Ιδιότητες συνδιακύμανσης

$\rightarrow Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$

$\rightarrow Cov(\alpha X+\beta, \gamma Y+\delta) = \alpha\gamma\cdot Cov(X,Y)$

$\rightarrow Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$.

Η διασπορά $V(x)$, είναι:

$$V(X) = E((X-E(x))^2) \Rightarrow V(x) = \iint_{T} (x-E(x))^2 f(x,y)\,dx\cdot dy = \sigma_x^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Αντίστοιχα ορίζονται οι $V(Y)$, σ_y.

Ορίζεται ο συντελεστής συσχέτισης των μεταβλητών X, Y

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}.$$

Αν $Cov(X,Y)=0 \Rightarrow \rho(X,Y)=0$, οι μεταβλητές ονομάζονται ασυσχέτιστες ή ορθογώνιες.

Αν $Cov(X,Y)>0$, αύξηση της $X \Rightarrow$ αύξηση της Y κατά μέσο όρο.

Αν $Cov(X,Y)<0$, αύξηση της $X \Rightarrow$ μείωση της Y " " "

Δισδιάστατες διακριτές κατανομές

Αντί συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, έχουμε:

$$P_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j) \quad i=1,2,\dots M, \quad j=1,2,\dots N.$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1 \leftarrow$$ Συνθήκη κανονικοποίησης.

→ Η τιμή της $p_i = P(X=x_i)$ είναι ίση με το άθροισμα των στοιχείων της i-σειράς του πίνακα. Η p_i αποτελεί την περιθώρια κατανομή ως προς X της P_{ij}.

→ Αντίστοιχα $P_j = P(Y=y_j) \Leftrightarrow P(Y=y_j) = \sum_{i=1}^{M} P_{ij}$

Αν $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ $\forall i,j$, τότε οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

Η συνάρτηση κατανομής της δισδιάστατης διακριτής τ.μ. (X,Y), ορίζεται κατ' αναλογίαν με την αντίστοιχη μονοδιάστατη:

$$F(x,y) = P(X \le x_k, Y \le y_l) = \sum_{i=1}^{k} \cdot \sum_{j=1}^{l} p_{ij}$$

Αν $g(X,Y)$ μια οποιαδήποτε συνάρτηση των διακριτών τ.μ X, Y, τότε η μέση τιμή της είναι:

$$E\left(g(X,Y)\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} g(x_i, y_i)\, p_{ij}$$

$$Cov(X,Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$