ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Τ.Μ ΚΑΙ Τ.Δ.

Έστω X διακριτή τ.μ. με σύνολο τιμών $C_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ και συνάρτηση g: $C_X \to C_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Τότε η σ.μ.π. της Y = g(X) δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y_j) = \sum_{x_i:\, g(x_i)=y_j} P(X = x_i)\,.$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. f_X συνεχή εκτός, ίσως, από πεπερασμένα το πλήθος σημεία. Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, "1-1" στο $S = \{x \in \mathbb{R} : f_x(x) > 0\}$ με την g^{-1} να έχει συνεχή παράγωγο στο T = g(S). Τότε η σ.π.π. της Y = g(X) δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_x(g^{-1}(y)) \left|\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|, & \text{αν } y \in T \\ 0, \quad \text{αν } y \notin T \end{cases}$$

Η σ.κ. της Y ισούται με:

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(g^{-1}(y))\,, & \text{αν g αύξουσα} \\ 1 - F_X(g^{-1}(y)), & \text{αν g φθίνουσα} \end{cases}$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω ότι η f_X είναι συνεχής εκτός ίσως από πεπερασμένα το πλήθος σημεία και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Έστω επίσης ότι το $S = \{x \in \mathbb{R} : f_x(x) > 0\}$ μπορεί να γραφεί ως ένωση m ξένων μεταξύ τους συνόλων, δηλαδή $S = \bigcup_1^m S_i$ με $S_i \bigcap S_j = \varnothing \quad (i \neq j=1,\ldots,m)$, έτσι ώστε ο περιορισμός g_i της g στο S_i να είναι 1-1 συνάρτηση και η g_i^{-1} να έχει συνεχή παράγωγο στο $T_i = g(S_i) \quad (i=1,\ldots,m)$. Τότε

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}(y) f_X\left(g_i^{-1}(y)\right)\left|\dfrac{dg_i^{-1}(y)}{dy}\right| I_{T_i}, & y \in T\,, \\ 0 & , \quad y \notin T\,, \end{cases}$$

Έστω, τώρα, το συνεχές τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X}=(X_1,X_2)^T$ με σ.π.π. $f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2)$. Θεωρούμε τον 1-1 μετασχηματισμό $y_i=g_i(x_1,x_2)$, i = 1,2 με αντίστροφο $x_j=h_j(y_1,y_2)$, j = 1,2 στον οποίον υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial h_j(y_1,y_2)}{\partial y_i}$ i = 1,2 και είναι συνεχείς. Τότε το τ.δ. $\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2)^T$ με $Y_i=g_i(X_1,X_2)$ έχει σ.π.π.

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1,y_2)=f_{\mathbf{X}}(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))\cdot|J|,$$

όπου $|J|$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του αντίστροφου μετασχηματισμού, δηλαδή:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1(y_1,y_2)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1(y_1,y_2)}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial h_2(y_1,y_2)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2(y_1,y_2)}{\partial y_1} \end{vmatrix}.$$

Με χρήση του παραπάνω προκύπτουν τα εξής:

- Αν $\mathbf{X}=(X_1,X_2)^T$ συνεχές τ.δ. με σ.π.π. $f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2)$ τότε η σ.π.π. f της τ.μ. $Y_1=X_1+X_2$ δίνεται από τον τύπο:

  $$f(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1-y_2,y_2)\,dy_2.$$

  Αν επιπλέον οι X_1,X_2 είναι ανεξάρτητες τότε:

  $$f(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y_1-y_2)\,f_{X_2}(y_2)\,dy_2.$$

- Αν $\mathbf{X}=(X_1,X_2)^T$ συνεχές τ.δ. με σ.π.π. $f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2)$ τότε η σ.π.π. f της τ.μ. $Y_1=X_1-X_2$ δίνεται από τον τύπο:

  $$f(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1+y_2,y_2)\,dy_2.$$

  Αν επιπλέον οι X_1,X_2 είναι ανεξάρτητες τότε:

  $$f(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y_1+y_2)\,f_{X_2}(y_2)\,dy_2.$$

- Αν $\mathbf{X}=(X_1,X_2)^T$ συνεχές τ.δ. με σ.π.π. $f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2)$ τότε η σ.π.π. f της τ.μ. $Y_1=X_1\bullet X_2$ δίνεται από τον τύπο:

$$f(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1/y_2, y_2)\ \frac{1}{|y_2|} dy_2 .$$

Αν επιπλέον οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τότε:

$$f(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y_1/y_2)\ f_{X_2}(y_2)\ \frac{1}{|y_2|} dy_2 .$$

- Αν $\mathbf{X}=(X_1, X_2)^T$ συνεχές τ.δ. με σ.π.π. $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ τότε η σ.π.π. f της τ.μ. $Y_1 = X_1/X_2$ δίνεται από τον τύπο:

$$f(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1 \bullet y_2, y_2)\ |y_2|\, dy_2 .$$

Αν επιπλέον οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τότε:

$$f(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y_1 \bullet y_2)\ f_{X_2}(y_2)\ |y_2|\, dy_2 .$$

Ορισμός: Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τ.μ. με σ.π.π. f_1 και f_2 αντίστοιχα. Η σ.π.π. f της τ.μ. $X_1 + X_2$ συμβολικά γράφεται $f = f_1 * f_2$, ονομάζεται συνέλιξη των f_1 και f_2 και όπως είδαμε

$$f(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y_1 - y_2)\ f_{X_2}(y_2)\ dy_2 ,\quad \text{με}\quad y_1 \in \mathbb{R} .$$

Έστω $X_1,...,X_n$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.π.π. f. Αν $S_n = X_1 + X_2 + .. + X_n$ με σ.π.π. f_n τότε:

$$f_n = f_{n-1} * f \Rightarrow f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(x-y)\ f(y)\ dy .$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω τ.μ. X με συνεχή σ.κ. F. Τότε η τ.μ. Y = F(X) ~ U(0,1).

<u>Πόρισμα:</u> Έστω συνάρτηση κατανομής F γνησίως αύξουσα και Y ~ U(0,1). Τότε η τ.μ. X = $F^{-1}(Y)$ ~ F.