ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ
ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Συνάρτηση Κατανομής:

Ονομάζουμε συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.) της τ.μ. X την:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ιδιότητες:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $F(x_1) \leq F(x_2)$ όταν $x_1 < x_2$,
3. $F(x_n) \downarrow F(x)$ όταν $x_n \downarrow x$, δηλαδή η F είναι δεξιά συνεχής,
4. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση F, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες 2,3,4 είναι σ.κ.π.

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές:

Μια τ.μ. X καλείται διακριτή αν παίρνει με πιθανότητα 1 πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο τιμών $\{x_0, x_1, \ldots\}$ δηλαδή:

$$P(X \in \{x_0, x_1, \ldots\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=x_k)=1.$$

Η συνάρτηση $f(x_k)=P(X=x_k)$, $k=0,1,\ldots$ καλείται συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $f(x_k) \geq 0$, $\forall k=0,1,2,\ldots$,
2. $\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_k)=1$

Αντίστροφα αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση f, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες 1,2 είναι σ.μ.π.

Υποθέτουμε ότι οι δυνατές τιμές x_0, x_1, …. έχουν αριθμηθεί έτσι ώστε $x_0 < x_1 < \ldots\ldots$

Τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- $F(x)=\begin{cases} 0, & x < x_0 \\ \sum_{k=0}^{r} f(x_k), & x_r \le x \le x_{r+1},\ r=0,1,2,\ldots \end{cases}$

- $f(x_k)=\begin{cases} F(x_0), & k=0 \\ F(x_k)-F(x_{k-1}), & k=1,2,\ldots \end{cases}$

Ισχύουν επίσης:

- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$,
- $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X=a)$,
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X=b)$,
- $P(a \le X < b) = F(b) - F(a) + P(X=a) - P(X=b)$.

<u>Παράμετροι διακριτής κατανομής:</u>

Έστω X μία διακριτή τ.μ. με τιμές $\{x_0, x_1, \ldots\}$ και σ.μ.π. $f(x_k) = P(X=x_k)$, k=0,1,….

- Λέγεται ότι η X έχει (πεπερασμένη) μέση τιμή $\xleftrightarrow{ορσ.}$ $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|\, f(x_k) < \infty$. Τότε η **μέση τιμή** ορίζεται ως:

$$\mu = E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(x_k)$$

- Έστω g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Τότε:

$$E(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k) f(x_k)\ ,$$

με την προϋπόθεση ότι $\sum_{k=0}^{\infty} |g(x_k)|f(x_k) < \propto$.

- Λέγεται ότι η υπάρχει η ροπή ν-τάξης περί την αρχή, $\nu \in \mathbb{N} \xleftrightarrow{ορσ.}$ $E(|X|^{\nu}) < \propto$. Τότε η **ροπή ν-τάξης περί την αρχή** ορίζεται ως:

$$\mu'_{\nu} = E(X^{\nu}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{\nu} f(x_k)$$

- Έστω η X έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ=E(X). Λέγεται ότι η υπάρχει η κεντρική ροπή ν-τάξης, $\nu \in \mathbb{N} \xleftrightarrow{ορσ.}$ $E(|X-\mu|^{\nu}) < \propto$. Τότε η **κεντρική ροπή ν-τάξης** ορίζεται ως:

$$\mu_{\nu} = E((X-\mu)^{\nu}) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k-\mu)^{\nu} f(x_k).$$

  Ειδικά η κεντρική ροπή $2^{ης}$-τάξης ονομάζεται **διασπορά** και συμβολίζεται σ^2 ή V(X):

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k-\mu)^2 f(x_k).$$

  Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς συμβολίζεται με σ και ονομάζεται **τυπική απόκλιση**.

Αν υπάρχει η ροπή ν-τάξης περί την αρχή, δηλαδή $E(|X|^{\nu})<\propto$, $\nu \in \mathbb{N}$, τότε και η $E(|X|^m)\propto$ $\forall m<\nu$, $m \in \mathbb{N}$.

<u>Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές:</u>

Μια τ.μ. X καλείται συνεχής αν υπάρχει πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$:

1. $f(x)\geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

και $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta : \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = P(\alpha < X \leq \beta)$.

Η συνάρτηση f καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της X.

Αντίστροφα αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση f, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες 1,2 είναι σ.π.π.

Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- $P(X=a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$,
- $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$,
- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, όπου η παράγωγος υπάρχει,
- $P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx =$

  $F(b) - F(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$.

<u>Παράμετροι συνεχούς κατανομής:</u>

Έστω X μία συνεχής τ.μ. και σ.π.π. f(x).

- Λέγεται ότι η X έχει (πεπερασμένη) μέση τιμή $\xleftrightarrow{\text{ορσ.}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < \infty$.

  Τότε η **μέση τιμή** ορίζεται ως:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

- Έστω g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Τότε:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx \ ,$$

  με την προϋπόθεση ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x)dx < \infty$.

- Λέγεται ότι η υπάρχει η ροπή ν-τάξης περί την αρχή, $\nu \in \mathbb{N} \xleftrightarrow{\text{ορσ.}}$ $E(|X|^{\nu}) < \infty$. Τότε η **ροπή ν-τάξης περί την αρχή** ορίζεται ως:

$$\mu'_{\nu} = E(X^{\nu}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu} f(x)dx \,.$$

- Έστω η X έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ=E(X). Λέγεται ότι η υπάρχει η κεντρική ροπή ν-τάξης, $\nu \in \mathbb{N} \xleftrightarrow{\text{ορσ.}} E(|X-\mu|^{\nu}) < \infty$. Τότε η **κεντρική ροπή ν-τάξης** ορίζεται ως:

$$\mu_{\nu} = E((X-\mu)^{\nu}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^{\nu} f(x)dx \,.$$

Ειδικά η κεντρική ροπή 2ης-τάξης ονομάζεται **διασπορά** και συμβολίζεται σ^2 ή V(X):

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \,.$$

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς συμβολίζεται με σ και ονομάζεται **τυπική απόκλιση**.

<u>Ιδιότητες Μέσης Τιμής - Διασποράς:</u>

- Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε E(α)=α.
- Έστω $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ και X,Y τ.μ. με (πεπερασμένη) μέση τιμή. Τότε η τ.μ. αX+βY έχει (πεπερασμένη) μέση τιμή και ισχύει:

$$E(\alpha X+\beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

- Έστω X τ.μ. και g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι E[g(X)], E[h(X)] ισχύει:

$$E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)]$$

- Έστω $\alpha_i \in \mathbb{R}$, g_i: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις με i=1,2,..,ν και X τ.μ. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι $E(g_i(X))$ με i=1,2,..,ν ισχύει:

$$E\{\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i g_i(X)\} = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i E\{g_i(X)\}$$

- Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε V(α)=0.
- Έστω $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ και X τ.μ. Τότε $V(\alpha X+\beta) = \alpha^2 V(X)$.
- Έστω X τ.μ. με πεπερασμένη $E(X^2)$. Τότε V(X) πεπερασμένη και ισχύει:

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2.$$