ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ
ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

<u>Συνάρτηση Κατανομής:</u>

Έστω $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^T$ τυχαίο διάνυσμα (τ.δ). Ονομάζουμε συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.) του τ.δ. $\mathbf{X}$ την:

$$F(\mathbf{x}) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n), \quad \forall \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

<u>Ιδιότητες:</u>

1. $0 \le F(\mathbf{x}) \le 1$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. Η F είναι μη φθίνουσα και δεξιά συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή.
3. $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(\mathbf{x}) = 0$ (i =1,…n), $F(+\infty,\ldots,+\infty)=1$.
4. $P\left[\bigcap\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i < X_i \le \beta_i)\right] = F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) - F(\alpha_1, \beta_2 \ldots, \beta_n) - \ldots - F(\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_{n-1}, \alpha_n) +$

$+F(\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \ldots, \beta_n) + \ldots + F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) - \ldots + (-1)^n F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \ge 0.$

<u>Διακριτά Τυχαία Διανύσματα:</u>

Ένα τ.δ. $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^T$ καλείται διακριτό αν παίρνει με πιθανότητα 1 πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο τιμών $\{\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \ldots\}$ δηλαδή:

$$P(\mathbf{X} \in \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\mathbf{X}=\mathbf{x}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 = x_{k_1}, \ldots, X_n = x_{k_n}) = 1.$$

Η συνάρτηση $f(\mathbf{x}_k) = P(\mathbf{X}=\mathbf{x}_k)$, k=0,1,…. καλείται συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) του τ.δ. $\mathbf{X}$ ή από κοινού σ.μ.π. των τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $f(\mathbf{x}_k) \geq 0, \forall k=0,1,2, \ldots$
2. $\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(\mathbf{x}_k) = 1.$

Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας μιας εκ των συνιστωσών του τ.δ. **X**, έστω X_i, δίνεται αθροίζοντας τις πιθανότητες για όλες τις δυνατές τιμές των άλλων συνιστωσών.

$$f_{X_i}(x_{k_i}) = P(X_i=x_{k_i}) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_{i-1}=0}^{\infty} \sum_{k_{i+1}=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} P(X_1=x_{k_1},\ldots, X_i=x_{k_i},\ldots, X_n=x_{k_n}).$$

Τέλος οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ καλούνται ανεξάρτητες όταν:

$$f(\mathbf{x}_k) = P(\mathbf{X}=\mathbf{x}_k) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_{k_i}), \ \forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \ldots\}.$$

<u>Συνεχή Τυχαία Διανύσματα:</u>

Ένα τ.δ. $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^T$ καλείται συνεχές αν υπάρχει πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^n$:

1. $f(\mathbf{x}) \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1.$

και $\forall y_1,\ldots,y_{2n} \in \mathbb{R}$ με $y_i < y_{i+1}$, $i = 1,..,2n-1$:

$$P(y_1 < X_1 \leq y_2,\ y_3 < X_2 \leq y_4,\ldots,\ y_{2n-1} < X_n \leq y_{2n}) = \int_{y_1}^{y_2} \ldots \int_{y_{2n-1}}^{y_{2n}} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n.$$

Η συνάρτηση f καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) του τ.δ. **X** ή από κοινού σ.π.π. των τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$.

Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- $F(\mathbf{x}) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$,

- $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial^n F(x_1, .., x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$, όπου η μικτή παράγωγος υπάρχει.

Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας μιας εκ των συνιστωσών του τ.δ. **X**, έστω της X_i, δίνεται ολοκληρώνοντας την σ.π.π. για όλες τις δυνατές τιμές των άλλων συνιστωσών.

$$f_{X_i}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n$$

Τέλος οι τ.μ $X_1, \ldots, X_n$ καλούνται ανεξάρτητες όταν:

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n .$$

Δεσμευμένες Κατανομές:

Α) Έστω X, Y διακριτές τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x_i, y_j)$, $i, j=0, 1, \ldots$ Ορίζουμε την δεσμευμένη σ.π.π. μιας διακριτής τ.μ. X, όταν γνωρίζουμε ότι η τ.μ. Y έχει την τιμή y_j, $j=0, 1, ..$ ως:

$$f_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)},$$

όπου $f_Y(y_j)$ είναι η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y.

Β) Έστω X, Y συνεχείς τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε την δεσμευμένη σ.π.π. μιας διακριτής τ.μ. X, όταν γνωρίζουμε ότι η τ.μ. Y έχει την τιμή $y \in \mathbb{R}$ ως:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$

όπου $f_Y(y)$ είναι η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της Υ.

Παρατήρηση: Έστω το τ.δ. $(X,Y)^T$ ακολουθεί τη διμεταβλητή Κανονική, δηλαδή:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-p^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right]}{(1-\rho^2)} \right\}.$$

Τότε η περιθώρια σ.π.π. της τ.μ. Χ είναι η $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ και η περιθώρια σ.π.π. της τ.μ. Υ, είναι η $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Επιπρόσθετα η δεσμευμένη σ.π.π. της τ.μ. Χ, όταν γνωρίζουμε ότι η τ.μ. Υ έχει την τιμή y, είναι η $N(\mu_X+\rho(y-\mu_Y)\sigma_X/\sigma_Y, \sigma_X^2)$, ενώ η δεσμευμένη σ.π.π. της Υ, όταν γνωρίζουμε ότι η τ.μ. Χ έχει την τιμή x, είναι η $N(\mu_Y+\rho(x-\mu_X)\sigma_Y/\sigma_X, \sigma_Y^2)$.

Παράμετροι κατανομής Πολυδιάστατων τ.μ.[1] :

Α) Έστω Χ, Υ διακριτές τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x_i, y_j)$, i, j=0,1,… Αν z=g(x,y) είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της τ.μ. Z=g(X,Y) δίνεται:

$$E(Z) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} g(x_i, y_i)\, f(x_i, y_i),$$

με την προϋπόθεση ότι η διπλή σειρά συγκλίνει απολύτως.

Β) Έστω Χ, Υ συνεχείς τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας f(x,y), x, $y \in \mathbb{R}$. Αν z=g(x, y) είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της τ.μ. Z=g(X,Y) δίνεται:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)\, dxdy,$$

με την προϋπόθεση ότι το διπλό ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. με πεπερασμένες μέσες τιμές E(X), E(Y). Τότε E(XY)=E(X)E(Y).

Έστω X, Y τ.μ. με πεπερασμένες μέσες τιμές μ_X=E(X), μ_Y=E(Y). Ορίζουμε ως συνδιακύμανση των X, Y την ποσότητα:

$$Cov(X, Y) = E\{(X- \mu_X)(Y- \mu_Y)\},$$

εφόσον υπάρχει η τελευταία μέση τιμή.

<u>Ιδιότητες:</u>

- Cov(X, c)=0, με c σταθερά,
- Cov(X, Y)=Cov(Y, X),
- Cov(X+Y, Z)=Cov(X, Z)+Cov(Y, Z),
- Cov(αX+β, γY+δ)=αγCov(X, Y), με α, γ$\in \mathbb{R}$,
- Cov(X, X)=V(X).

<u>Πρόταση:</u> Αν η Cov(X, Y) είναι πεπερασμένη τότε:

$$Cov(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

Όταν Cov(X, Y)=0 οι X, Y καλούνται **ασυσχέτιστες.**

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι ότι αν X, Y ανεξάρτητες τότε X, Y ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

<u>Θεώρημα:</u> Αν οι X, Y έχουν από κοινού σ.π.π. τη διμεταβλητή Κανονική και είναι ασυσχέτιστες, τότε είναι και ανεξάρτητες.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω X, Y τ.μ. με $E(X^2)$, $E(Y^2) < \infty$. Τότε:

---

[1] Όλα τα παρακάτω που θα δώσουμε για διδιάστατες τ.μ. επεκτείνονται σε n-διάστατες τ.μ.

$$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2Cov(X, Y),$$

και γενικότερα:

$$V(\alpha X+\beta Y) = \alpha^2 V(X)+\beta^2 V(Y)+2\alpha\beta Cov(X, Y), \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Αν X,Y ασυσχέτιστες τότε: $V(X \pm Y)=V(X)+V(Y)$.

Αν X,Y τ.μ. με πεπερασμένες διασπορές τότε ορίζουμε ως συντελεστή συσχέτισης αυτών την ποσότητα:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

<u>Ιδιότητες:</u>

- $-1 \le \rho \le 1$ (όταν $\rho<0$ οι X,Y καλούνται αρνητικά συσχετισμένες, όταν $\rho>0$ οι X,Y καλούνται θετικά συσχετισμένες, ενώ όταν $\rho=0$ οι X,Y είναι ασυσχέτιστες),
- $\rho(X,X)=1$,
- $\rho(\alpha X+\beta,\gamma Y+\delta)=\begin{cases} \rho(X,Y), & \text{αν } \alpha\gamma>0 \\ -\rho(X,Y), & \text{αν } \alpha\gamma<0 \end{cases}$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} : \alpha\gamma \neq 0$.

<u>Δεσμευμένη Μέση Τιμή και Δεσμευμένη Διασπορά:</u>

Α) Έστω X, Y διακριτές τ.μ. και $f_{X|Y}(x_i|y_j)$, $i=0,1,\ldots$ η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένου ότι $Y=y_j$, $j=0,1\ldots$.Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου ότι $Y=y_j$ ορίζεται από την σχέση:

$$\mu_{X|Y}(y_j)=E(X|Y=y_j)=\sum_{i=0}^{\infty} x_i f_{X|Y}(x_i|y_j),$$

με την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως. Όμοια ορίζουμε την $\mu_{Y|X}(x_i)$. Περαιτέρω αν $z=g(x,y)$ μια συνεχής συνάρτηση, τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της διακριτής τ.μ. $Z=g(X,Y)$ δεδομένου ότι $Y=y_j$ δίδεται από την σχέση:

$$\mu_{Z|Y}(y_j)=E(Z|Y=y_j)=\sum_{i=0}^{\infty} g(x_i,y_j) f_{X|Y}(x_i|y_i),$$

με την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η δεσμευμένη μέση τιμή, ορίζουμε την δεσμευμένη διασπορά της τ.μ. X δεδομένου ότι $Y=y_j$ ως:

$$\sigma^2_{X|Y}(y_j)=V(X|Y=y_j)=E\{[X-\mu_{X/Y}(y_j)]^2|\, y_j\},$$

με την περαιτέρω προϋπόθεση ότι υπάρχει η μέση τιμή στο δεξιό μέλος. Όμοια ορίζουμε την $\sigma^2_{Y|X}(x_i)$.

B) Έστω X, Y συνεχείς τ.μ. και $f_{X|Y}(x|y)$ η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X δεδομένου ότι Y=y. Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου ότι Y=y ορίζεται από την σχέση:

$$\mu_{X|Y}(y)=E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx,$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως. Όμοια ορίζουμε την $\mu_{Y|X}(x)$.

Περαιτέρω αν $z=g(x,y)$ μια πραγματική συνάρτηση, τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της συνεχούς τ.μ. $Z=g(X,Y)$ δεδομένου ότι Y=y δίδεται από την σχέση:

$$\mu_{Z|Y}(y)=E(Z|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X|Y}(x|y)dx,$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως.

Με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η δεσμευμένη μέση τιμή, ορίζουμε την δεσμευμένη διασπορά της X δεδομένου ότι Y=y ως:

$$\sigma^2_{X|Y}(y)=V(X|y)=E\{[X-\mu_{X/Y}(y)]^2|Y=y\},$$

με την περαιτέρω προϋπόθεση ότι υπάρχει η μέση τιμή στο δεξιό μέλος. Όμοια ορίζουμε την $\sigma^2_{Y|X}(x)$.

Η καμπύλη με εξίσωση $y=\mu_{Y|X}(x)$ καλείται καμπύλη παλινδρόμησης της Y στην X.

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι η δεσμευμένη μέση τιμή, π.χ. $\mu_{X|Y}$ είναι σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς πραγματική συνάρτηση. Για την διακριτή περίπτωση π.χ. η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε $y = y_j$, j=0,1…. και εκχωρεί στο σημείο y_j τον πραγματικό αριθμό $\mu_{X|Y}(y_j)=E(X|Y=y_j)$. Έτσι η $W = E(X|Y)$ είναι μία διακριτή τ.μ. η οποία παίρνει τις τιμές $\mu_{X|Y}(y_j)$. Γενικότερα η $\mu_{Z|Y}(y_j) = E(Z|Y=y_j) = E(g(X,Y)|Y=y_j)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση οριζόμενη για κάθε $y = y_j$, j=0,1…., ενώ η $W = E(g(X,Y)|Y)$ είναι μία διακριτή τ.μ. η οποία παίρνει τις τιμές $\mu_{Z|Y}(y_j)$. Ανάλογα συμπέρασμα προκύπτουν και στην συνεχή περίπτωση, καθώς επίσης και για την δεσμευμένη διασπορά.

Θεώρημα: Έστω X, Y τ.μ. με $E(X^2) < \infty$. Τότε:

$$E(X)=E[E(X|Y)]$$

και

$$V(X)=E[V(X|Y)]+V[E(X|Y)].$$

Ιδιότητες:

1) $E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2|Y) = \alpha_1 E(X_1|Y) + \alpha_2 E(X_2|Y), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
2) Αν $X = h(Y)$ τότε $E(X|Y) = X$.
3) Αν X, Y ανεξάρτητες τ.μ. τότε $E(X|Y) = E(X)$.